אנליזה מתקדמת למורים, פתרון תרגיל 5

3 בדצמבר 2020

1. פרקו את הפולינומים הבאים לגורמים ממשיים ממעלה לכל היותר 2:

(א) x^4+16

(ב) x^3+1

<u>פתרון:</u>

א. נמצא את פתרונות המשוואה $z^4=-16=16\text{cis}\pi$: $z_k=2\text{cis}(\frac{\pi+2\pi k}{4}), k\in\{0,1,2,3\}$. הזויות הן: $\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\}$, ומכאן ששני הצמדים הם: $\{2\text{cis}\frac{3\pi}{4},2\text{cis}\frac{5\pi}{4}\},\{2\text{cis}\frac{\pi}{4},2\text{cis}\frac{7\pi}{4}\}$.
מכאן נוכל למצוא את הגורמים:

הראשון:

$$(x-2\text{cis}\frac{\pi}{4})(x-2\text{cis}\frac{7\pi}{4})=x^2-2Re(2\text{cis}\frac{\pi}{4})x+|2\text{cis}\frac{\pi}{4}|^2=x^2-4\cos\frac{\pi}{4}x+4=x^2-2\sqrt{2}x+4$$

השני:

$$(x-2\text{cis}\frac{3\pi}{4})(x-2\text{cis}\frac{5\pi}{4})=x^2-2Re(2\text{cis}\frac{3\pi}{4})x+|2\text{cis}\frac{3\pi}{4}|^2=x^2-4\cos\frac{3\pi}{4}x+4=x^2+2\sqrt{2}x+4$$

ובסה"כ:

$$x^4+16=(x^2-2\sqrt{2}x+4)(x^2+2\sqrt{2}x+4)$$

ב. נמצא את פתרונות המשוואה $z^3=-1=\text{cis}180$: $z_k=\text{cis}60+120k, k\in\{0,1,2\}$. הזויות הן: $\{60,180,300\}$. זוית של 180 נותנת לנו מספר ממשי (-1), וממנה נקבל את גורם ממעלה 1: $x+1$.

שתי הזויות האחרות נותנות לנו שני מספרים צמודים שמהם נקבל את הגורם השני:

$$(x-\text{cis}60)(x-\text{cis}300)=x^2-2Re(\text{cis}60)+|\text{cis}60|^2=x^2-2\cos 60+1=x^2-x+1$$

ובסה"כ:

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$$

2. בדקו האם הפונקציות הבאות גזירות, ואם כן מצאו את הנגזרת:

(א) $f(x+yi)=\cos x\cos y+\sin x\sin yi$

(ב) $f(x+yi)=xy+\frac{y^2-x^2}{2}i$

(ג) $f(z)=z\overline{z}$

(ד) $f(x+yi)=e^y\mathrm{cis}x$

(ה) $f(x+yi)=e^{xy}\mathrm{cis}(xy)$

(ו) $f(x+yi)=\sin x\cos y+(\cos x\sin y)i$

(ז) $f(z)=(5-i)z^3-iz^5+6z^8$

פתרון:

א. נבדוק קושי רימן: $U(x,y)=\cos x\cos y, V(x,y)=\sin x\sin y$, לכן:

$$U_x=-\sin x\cos y, U_y=-\cos x\sin y$$

$$V_x=\cos x\sin y, V_y=\sin x\cos y$$

וכיון ש $U_x\neq V_y$ נקבל שהפונקציה לא גזירה.

ב. $U(x,y)=xy, V(x,y)=\frac{y^2-x^2}{2}=\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}$, ולכן:

$$U_x=y, U_y=x$$

$$V_x=-x, V_y=y$$

תנאי קושי רימן מתקיים: $U_x=V_y, U_y=-V_x$, ולכן הפונקציה גזירה ונגזרתה היא:

$$f'(x+yi)=U_x+V_xi=y-xi$$

ג. $f(x+yi)=x^2+y^2$, ולכן $U(x,y)=x^2+y^2, V(x,y)=0$. נמצא נגזרות חלקיות:

$$U_x=2x, U_y=2y$$

$$V_x = 0, V_y = 0$$

משוואות קושי־רימן לא מתקיימות ולכן f לא גזירה.

ד. נקבל: $U(x,y) = e^y \cos x, V(x,y) = e^y \sin x$. נגזרות חלקיות:

$$U_x = -e^y \sin x, U_y = e^y \cos x$$

$$V_x = e^y \cos x, V_y = e^y \sin x$$

משוואות קושי רימן לא מתקיימות ($-e^y \sin x \neq e^y \sin x$), ולכן f לא גזירה.

ה. $U(x,y) = e^{xy}\cos(xy), V(x,y) = e^{xy}\sin(xy)$. נגזרות חלקיות:

$$U_x = ye^{xy}\cos(xy) - ye^{xy}\sin(xy) = ye^{xy}(\cos(xy) - \sin(xy)), U_y = xe^{xy}(\cos(xy) - \sin(xy))$$

$$V_x = ye^{xy}\sin(xy) + ye^{xy}\cos(xy) = ye^{xy}(\sin(xy) + \cos(xy)), V_y = xe^{xy}(\sin(xy) + \cos(xy))$$

משוואות קושי־רימן לא מתקיימות ולכן לא גזירה.

ו. כאן $U(x,y) = \sin x \cos y, V(x,y) = \cos x \sin y$, ולכן הנגזרות החלקיות:

$$U_x = \cos x \cos y, U_y = \sin x \sin y$$

$$V_x = -\sin x \sin y, V_y = \cos x \cos y$$

משוואות קושי רימן מתקיימות ולכן גזירה, ונגזרתה:

$$f'(x+yi) = U_x + V_x i = \cos x \cos y - (\sin x \sin y)i$$

ז. לפי מה שלמדנו על נגזרת פולינום נקבל:

$$f'(z) = (15-3i)z^2 - 5uz^4 + 48z^7$$

3. חשבו את המספרים הבאים (התוצאה צריכה להיות מספר מרוכב בהצגה קרטזית או פולרית):

(א) e^{1+2i}

(ב) $e^{5\text{cis}\pi}$

(ג) $e^{\mathrm{cis}\frac{\pi}{4}}$

<u>**פתרון:**</u>

א. $e^{1+2i} = e^1\mathrm{cis}2 = e\mathrm{cis}2$.

ב. $e^{5\mathrm{cis}\pi} = e^{-5}$.

ג. כאן נצטרך להעביר תחילה את $\mathrm{cis}\frac{\pi}{4}$ לצורה קרטזית: $\mathrm{cis}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
ולכן: $e^{\mathrm{cis}\frac{\pi}{4}} = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i} = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{cis}\frac{\sqrt{2}}{2}$.

בהצלחה!