

פתרון תרגיל בית 2

שאלה 1

א. חקור באופן מלא (תחום הגדרה, אסימפטוטות, תחומי עלייה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות

$$f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2}$$

ונקודות פיתול) וצייר סקיצה של גרף הפונקציה

ב. לאילו ערכים של פרמטר a למשוואה $\frac{x^3 - 4}{x^2} = x + a$ אין שורשים ממשיים?

פתרון שאלה 1

א. תחום הגדרה – המכנה מתאפס כאשר $x^2 = 0$ ולכן תחום ההגדרה הוא $x \neq 0$.
אסימפטוטה אנכית – כאשר $x = 0$ המכנה מתאפס ולכן הישר $x = 0$ חשוד לאסימפטוטה אנכית.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 - 4}{x^2} = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 - 4}{x^2} = -\infty$$

אסימפטוטה משופעת –

תזכורת:

אסימפטוטה משופעת

הישר $y = ax + b$ נקרא אסימפטוטה משופעת של הפונקציה $f(x)$ ב $+\infty$ אם $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

הישר הנ"ל ייקרא אסימפטוטה משופעת ב $-\infty$ אם $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

במקרה המיוחד $a = 0$ האסימפטוטה נקראת גם האסימפטוטה האופקית של $f(x)$.

משפט

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע (a, ∞) . אם קיימים הגבולות $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$

אז הישר $y = ax + b$ הוא האסימפטוטה המשופעת היחידה ב $+\infty$ של $f(x)$.

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע $(-\infty, c)$. אם קיימים הגבולות $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$

אז הישר $y = ax + b$ הוא האסימפטוטה המשופעת היחידה ב $-\infty$ של $f(x)$.

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4}{x \cdot x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4}{x^3} = 1, b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^3 - 4}{x^2} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^3 - 4 - x^3}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{-4}{x^2} \right] = 0$$

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 4}{x \cdot x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 4}{x^3} = 1, b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^3 - 4}{x^2} - x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^3 - 4 - x^3}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{-4}{x^2} \right] = 0$$

האסימפטוטה המשופעת ב $-\infty$ וב $+\infty$ היא $y = x$.

נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה.

נבדוק תחילה לאילו ערכי x הנגזרת מתאפסת:

$$f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2 \cdot x^2 - 2x \cdot (x^3 - 4)}{x^4} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^4 + 8x}{x^4} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^3 + 8}{x^3}$$

הנגזרת מאפסת כאשר $x^3 + 8 = 0$ כלומר כאשר $x = -2$.

נבדוק תחומי עלייה וירידה:

x	$x <$	-2	$< x <$	0	$< x$
-----	-------	------	---------	-----	-------

$f(x)$	עולה		יורד	
$f'(x)$	חיובי	0	שלילי	חיובי

נקודת מקסימום $(-2, -3)$.

תחומי עלייה $0 < x$ או $x < -2$.

תחומי ירידה $-2 < x < 0$.

נמצא נקודות פיתול:

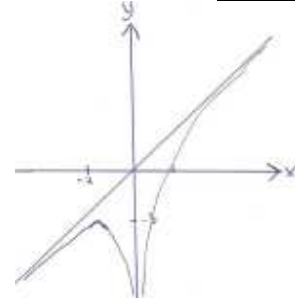
נשווה את הנגזרת השנייה לאפס

$$f'(x) = \frac{x^3 + 8}{x^3} \Rightarrow f''(x) = \frac{3x^2 \cdot x^3 - 3x^2 \cdot (x^3 + 8)}{x^6} \Rightarrow f''(x) = \frac{-24x^2}{x^6} \Rightarrow f''(x) = \frac{-24}{x^4}$$

הנגזרת השנייה לא מתאפסת ולכן אין נקודות פיתול.

הנגזרת השנייה שלילית בכל תחום הגדרת הפונקציה ולכן הפונקציה קעורה כלפי מטה לכל x .

שרטוט



ב. על פי השרטוט ניתן לראות שכל הפונקציה מתחת לישר $y = x$ ולכן כאשר $a > 0$ אין פתרון למשוואה

$$\frac{x^3 - 4}{x^2} = x + a$$

שאלה 2

א. חקור באופן מלא (תחום הגדרה, אסימפטוטות, תחומי עלייה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות

ונקודות פיתול) וצייר סקיצה של גרף הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 - 3}{|x| - 2}$

ב. לאילו ערכים של פרמטר a למשוואה $f(x) = a$ אין פתרון ממשי?

פתרון שאלה 2

א. תחום הגדרה: כאשר המכנה מתאפס הפונקציה לא מוגדרת.

$$x \neq 2, x \neq -2 \Leftrightarrow |x| \neq 2 \Leftrightarrow |x| - 2 \neq 0$$

אסימפטוטות אנכיות – הפונקציה לא מוגדרת כאשר $x = 2, x = -2$ ולכן הישרים $x = 2, x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 3}{|x| - 2} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 3}{|x| - 2} = -\infty$$

יכולים להיות אסימפטוטות אנכיות.

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 - 3}{|x| - 2} = -\infty, \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - 3}{|x| - 2} = -\infty$$

סה"כ קיבלנו ש $x = 2, x = -2$ אסימפטוטות אנכיות.

אסימפטוטות משופעות – כאשר $0 < x$ נקבל ש $|x| = x$ ולכן עבור $x \rightarrow +\infty$ ניתן להסתכל על

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$$

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3}{x \cdot (x - 2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 2x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 - 3}{x - 2} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 - 3 - x^2 + 2x}{x - 2} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{2x - 3}{x - 2} \right] = 2$$

האסימפטוטה המשופעת ב $x \rightarrow +\infty$ היא $y = x + 2$.

כאשר $0 > x$ נקבל ש $|x| = -x$ ולכן עבור $x \rightarrow -\infty$ ניתן להסתכל על הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 - 3}{-x - 2}$.

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3}{x \cdot (-x - 2)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3}{-x^2 - 2x} = -1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-1)x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2 - 3}{-x - 2} + x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2 - 3 - x^2 - 2x}{-x - 2} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{-2x - 3}{-x - 2} \right] = 2$$

האסימפטוטה המשופעת ב $x \rightarrow -\infty$ היא $y = -x + 2$.

נקודות קיצון – נבדוק עבור $0 < x$ ואז $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$.

נגזור נשווה לאפס:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x \cdot (x - 2) - 1 \cdot (x^2 - 3)}{(x - 2)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x - 1)(x - 3)}{(x - 2)^2}$$

הנגזרת מתאפסת כאשר $x = 1, x = 3$ ולכן הן נקודות חשודות לקיצון.

נבדוק תחומי עלייה וירידה והאם הנקודות החשודות הן קיצון.

x	0	$< x <$	1	$< x <$	2	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$		עולה	מקסימום	יורד		יורד	מינימום	עולה
$f'(x)$		חיובי	0	שלילי		שלילי	0	חיובי

(1,2) מקסימום, (3,6) מינימום.

נבדוק עבור $0 > x$ ואז $f(x) = \frac{x^2 - 3}{-x - 2}$.

נגזור נשווה לאפס:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{-x - 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x \cdot (-x - 2) + 1 \cdot (x^2 - 3)}{(-x - 2)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x^2 - 4x + x^2 - 3}{(x - 2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-x^2 - 4x - 3}{(x - 2)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-(x + 1)(x + 3)}{(x - 2)^2}$$

הנגזרת מתאפסת כאשר $x = -1, x = -3$ ולכן הן נקודות חשודות לקיצון.

נבדוק תחומי עלייה וירידה והאם הנקודות החשודות הן קיצון.

x	$x <$	-3	$< x <$	-2	$< x <$	-1	$< x <$	0
$f(x)$	יורד	מינימום	עולה		עולה	מקסימום	יורד	
$f'(x)$	שלילי	0	חיובי		חיובי	0	שלילי	

(-1,2) מקסימום, (-3,6) מינימום, (0,1.5) מינימום.

תחומי עלייה: $-3 < x < -2, -2 > x > -1, 0 < x < 1, 3 < x$

תחומי ירידה: $x < -3, -1 < x < 0, 1 < x < 2, 2 < x < 3$

נקודות פיתול:

$$f(-a) = \frac{(-a)^2 - 3}{|-a| - 2} = \frac{a^2 - 3}{a - 2} = f(a) \text{ היא פונקציה זוגית מכיוון ש } f(x) = \frac{x^2 - 3}{|x| - 2}$$

מספיק לבחון נקודות פיתול עבור $0 < x$.

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 4 - 1}{(x - 2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(x - 2)^2}{(x - 2)^2} - \frac{1}{(x - 2)^2} \Rightarrow f'(x) = 1 - (x - 2)^{-2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{(x - 2)^3}$$

הנגזרת השנייה לא מתאפסת ולכן אי נקודות פיתול.

נבדוק תחומי קמירות כלפי מטה וכלפי מעלה. נשים לב שאם הפונקציה זוגית אז גם הנגזרת השנייה זוגית

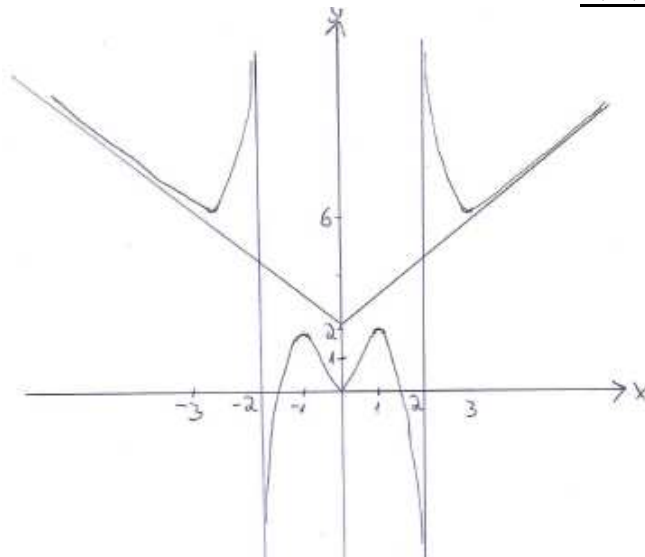
ואז ניתן להסיק תחומי קמירות כלפי מטה וכלפי מעלה גם עבור $x < 0$.

x	$x <$	-2	$< x <$	0	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	מעלה		מטה		מטה		מעלה
$f''(x)$	חיובי		שלילי		שלילי		חיובי

תחומי קמירות כלפי מעלה: $x < -2, 2 < x$

תחומי קמירות כלפי מטה: $-2 < x < 0, 0 < x < 2$

שרטוט



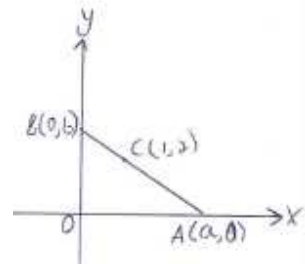
ב. על פי השרטוט ניתן לראות שכאשר $2 < a < 6$ אין למשוואה $f(x) = a$ פתרונות ממשיים.

שאלה 3

מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודה $C(1,2)$ כך ששטח המשולש הנמצא ברביע הראשון החסום ע"י

הישר הנ"ל ושני צירי המערכת (ציר ה x וציר ה y) יהיה מינימאלי.

פתרון שאלה 3



נחשב את שטח המשולש AOB באמצעות a .

$$.b = 2 - \frac{2}{1-a} \leftarrow \frac{2}{1-a} = \frac{b-2}{-1} \leftarrow m_{AC} = m_{BC}$$

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(2 - \frac{2}{1-a}\right) = a - \frac{a}{1-a}$$

$$.f(a) = a - \frac{a}{1-a}$$

$$f(a) = a - \frac{a}{1-a} \Rightarrow f'(a) = 1 - \frac{1 \cdot (1-a) - (-1) \cdot a}{(1-a)^2} \Rightarrow f'(a) = 1 - \frac{1}{(1-a)^2}$$

$$1 - \frac{1}{(1-a)^2} = 0 \Rightarrow (1-a)^2 = 1 \Rightarrow a = 2 \vee a = 0$$

$a = 0$ נפסל.

$a = 2$ חשוד לקיצון. נגזור פעם שנייה

$$f'(a) = 1 - \frac{1}{(1-a)^2} \Rightarrow f'(a) = 1 - (1-a)^{-2} \Rightarrow f''(a) = -(-2)(1-a) \cdot (-1) = 2a - 2 \Rightarrow f''(2) = 2 > 0$$

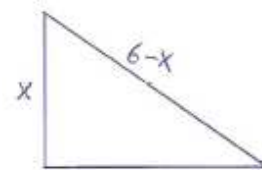
ולכן עבור $a = 2$ נקבל שטח מינימאלי.

הישר עובר דרך הנקודות $(1, 2), (2, 0)$ ולכן משוואת הישר $y = -2x + 4$.

שאלה 4

הוכח שבמשולש ישר זווית שבו סכום אורכי היתר ואחד הניצבים שווה ל 6, שטחו קטן מ 5.

פתרון שאלה 4



נחשב את שטח המשולש באמצעות x .

$$. \sqrt{(6-x)^2 - x^2} = \sqrt{36 - 12x}$$

$$. S = \frac{1}{2} x \sqrt{36 - 12x}$$

נגזור את הפונקציה $f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{36-12x}$ ונקבל

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{36-12x} + \frac{x}{2} \cdot \frac{-12}{2\sqrt{36-12x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{36-12x}}{2} - \frac{3x}{\sqrt{36-12x}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(36-12x)-6x}{2\sqrt{36-12x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{36-18x}{2\sqrt{36-12x}}$$

הנגזרת שווה לאפס כאשר $x = 2$. המכנה חיובי ולכן ניתן לבדוק את סימן הנגזרת השנייה של המונה בלבד. הנגזרת של המונה היא -18 ולכן כאשר $x = 2$ נקבל שטח מקסימאלי.

$$f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{36-12 \cdot 2} = \sqrt{12} < 5$$

שאלה 5

הוכח כי לכל $x > 0$ $x > \ln(1+x)$.

פתרון שאלה 5

נראה שהערך הקטן ביותר של הפונקציה $g(x) = x - \ln(1+x)$ בתחום $x \geq 0$ הוא אפס.

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} \Rightarrow g'(x) = \frac{x}{1+x}$$

$x > 0$. מכיוון ש $g(0) = 0$ נקבל שלכל $x > 0$ $g(x) > 0$ ואז $x > \ln(1+x)$.

שאלה 6

חשב את האינטגרליים הבאים השתמש באינטגרליים המיידים:

א. $\int \frac{9^x - 4^x}{3^x - 2^x} dx$

ב. $\int \frac{11}{\sqrt[3]{4-5x}} dx$

ג. $\int \frac{x^2 + 4x + 5}{x+4} dx$

ד. $\int \sin x \cos 5x dx$

ה. $\int (1 + \sqrt[3]{x^2})^2 dx$

פתרון שאלה 6

סעיף א

$$\int \frac{9^x - 4^x}{3^x - 2^x} dx = \int \frac{(3^x - 2^x) \cdot (3^x + 2^x)}{3^x - 2^x} dx = \int (3^x + 2^x) dx = \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{2^x}{\ln 2} + c$$

סעיף ב

$$\int \frac{11}{\sqrt[3]{4-5x}} dx = \int 11 \cdot (4-5x)^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{11}{-5} \cdot \frac{3}{2} (4-5x)^{\frac{2}{3}} + c = -\frac{33}{10} \sqrt[3]{(4-5x)^2} + c$$

סעיף ג

$$\int \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 4} dx = \int \left(\frac{x(x+4)}{x+4} + \frac{5}{x+4} \right) dx = \int \left(x + \frac{5}{x+4} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 5 \ln|x+4| + c$$

סעיף ד

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

נשתמש בזהויות

$$\int \sin x \cos 5x dx = \int \frac{1}{2} (\sin 6x + \sin(-4x)) dx = \int \frac{1}{2} (\sin 6x - \sin(4x)) dx = -\frac{1}{12} \cos 6x + \frac{1}{4} \cos 4x + c$$

סעיף ה

$$\int (1 + \sqrt[3]{x^2})^2 dx = \int \left(1 + 2x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{4}{3}} \right) dx = x + \frac{6x^{\frac{5}{3}}}{5} + \frac{3x^{\frac{7}{3}}}{7} + c$$

שאלה 7

חשב את האינטגרליים הבאים בעזרת שיטת ההצבה:

א. $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$

ב. $\int x^3 \sqrt{x^4 + 1} dx$

ג. $\int \frac{x}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$

פתרון שאלה 7

סעיף א

$$\int \sin t dt = -\cos t = -\cos(\ln x) + c \quad . dt = \frac{dx}{x} \leftarrow t = \ln x$$

נציב

סעיף ב

$$\int x^3 \sqrt{x^4 + 1} dx = \frac{1}{4} \int \sqrt{t} dt = \frac{2t\sqrt{t}}{6} = \frac{2(x^4 + 1)\sqrt{x^4 + 1}}{6} + c \quad . dt = 4x^3 dx \leftarrow t = x^4 + 1$$

נציב

סעיף ג

$$x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt$$

נציב

$$\int \frac{t^6 \cdot 6t^5}{t^3 + t^2} dt = \int \frac{6t^9}{1+t} dt$$

ומכאן מבצעים חלוקת פולינומים ופותרים.

שאלה 8

חשב את האינטגרלים הבאים בעזרת שיטת אינטגרציה בחלקים:

א. $\int x^3 \ln x dx$

ב. $\int \frac{2x}{\sqrt{x-1}} dx$

ג. $\int \arctan x dx$

ד. $\int e^x \sin(2x) dx$

ה. $\int x \cos x dx$

$$\int \sqrt[3]{x} \ln x dx \quad .$$

פתרון שאלה 8

סעיף א

נפתור בעזרת אינטגרציה בחלקים:

$$u = \ln x \quad v = \frac{x^4}{4}$$

$$u' = \frac{1}{x} \quad v' = x^3$$

$$\int x^3 \ln x dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \int \frac{x^3}{4} dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{x^4}{16} + c$$

סעיף ב

$$v = 2(x-1)^{0.5} \quad u = 2x$$

נפתור בעזרת אינטגרציה בחלקים

$$v' = (x-1)^{-0.5} \quad u' = 2$$

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x-1}} dx = 4x\sqrt{x-1} - \int 4(x-1)^{\frac{1}{2}} dx = 4x\sqrt{x-1} - \frac{8(x-1)\sqrt{x-1}}{3} + c$$

סעיף ג

$$u' = \frac{1}{1+x^2} \quad u = \arctan x$$

נסמן $v = x$ ואז $v' = 1$

נשתמש בנוסחה $\int uv' dx = uv - \int u'v dx$ ונקבל

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

נשאר לנו לפתור את האינטגרל הבא $\int \frac{x}{1+x^2} dx$

נבחר בהצבה $t = x^2$ ואז $dt = 2x dx$

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t} = \frac{1}{2} \ln|1+t| = \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

סעיף ד

נפתור בעזרת אינטגרציה בחלקים:

$$u = \sin(2x) \quad v = e^x$$

$$u' = 2 \cos(2x) \quad v' = e^x$$

$$\int e^x \sin(2x) dx = e^x \sin(2x) - 2 \int e^x \cos(2x) dx$$

נשאר לחשב את האינטגרל $\int e^x \cos(2x) dx$

ניעזר שוב באינטגרציה בחלקים:

$$u = \cos(2x) \quad v = e^x$$

$$u' = -2 \sin(2x) \quad v' = e^x$$

$$\int e^x \cos(2x) dx = e^x \cos(2x) + 2 \int e^x \sin(2x) dx$$

נציב במשוואה שקיבלנו קודם

$$\int e^x \sin(2x) dx = e^x \sin(2x) - 2 \cdot (e^x \cos(2x) + 2 \int e^x \sin(2x) dx)$$

$$\int e^x \sin(2x) dx = e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) - 4 \int e^x \sin(2x) dx$$

$$5 \int e^x \sin(2x) dx = e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x)$$

$$\int e^x \sin(2x) dx = \frac{1}{5} e^x \sin(2x) - \frac{2}{5} e^x \cos(2x) + c$$

טעיה

נפתור בעזרת אינטגרציה בחלקים:

$$u = x \quad v = \sin x$$

$$u' = 1 \quad v' = \cos x$$

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + c$$

טעיה 1

נפתור בעזרת אינטגרציה בחלקים:

$$u = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \quad v = \ln x$$

$$u' = x^{\frac{1}{3}} \quad v' = \frac{1}{x}$$

$$\int \sqrt[3]{x} \ln x dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \ln x - \frac{3}{4} \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \ln x - \frac{9}{16} x^{\frac{4}{3}} + c$$