שיעור חזרה

19 בינואר 2021

תרגילים:

1. a_n היא סדרה הנדסית שמנתה $2i$. הוכיחו שלכל n מתקיים:

$$a_{n+4} = 16a_n$$

פתרון: מתקיים: $a_{n+4} = q^4 a_n = (2i)^4 a_n = 16a_n$

.2

(א) פתרו את המשוואה

$$z^2 + (-5+2i)z + 7 + i = 0$$

פתרון:

$$z_{1,2} = \frac{5-2i \pm \sqrt{25-20i-4-4(7+i)}}{2} = \frac{5-2i \pm \sqrt{-7-24i}}{2}$$

נטפל בשורש. נרצה למצוא $a + bi = \sqrt{-7-24i}$ נקבל:

$$(a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi = -7 - 24i$$

$$a^2 - b^2 = -7$$

$$2ab = -24$$

נשים לב ש־ $a, b \neq 0$ (כי אם $a, b = 0$ נקבל סתירה במשוואה השנייה). לכן נוכל להציב $a = -\frac{12}{b}$ בראשונה:

$$\left(-\frac{12}{b}\right)^2 - b^2 = -7$$

$$-b^4+7b^2+144=0$$

$$b^2=t$$

$$-t^2+7t+144$$

$$t\in\{16,-9\}$$

הערך $b^2=-9$ לא ייתכן כי b ממשי, ולכן $b^2=16$, ולכן $b=\pm4$ואז $a=\mp3$ (כלומר, הסימן של a הפוך מהסימן של b). נחזור לפתרון:

$$z_{1,2}=\frac{5-2i\pm\sqrt{-7-24i}}{2}=\frac{5-2i\pm(3-4i)}{2}$$

$$z_1=4-3i$$

$$z_2=1+i$$

(ב) נסמן ב־w את הפתרון למשוואה הקרוב יותר לראשית הצירים. a_n היא סדרה חשבונית. נתונים שני איברים בסדרה: $1,w$. הוכיחו:

$$\forall n:a_n=1+bi$$

כאשר b הוא מספר ממשי.

פתרון: אצלנו $w=1+i$. נסמן את הפרש הסדרה ב־ $d_{\mathbb{C}}=a+bi$. אנחנו יודעים על שני איברים בסדרה, ולכן מספר ההפרשים הוא $k\in\mathbb{N}$, ולכן: $1+i=1+kd_{\mathbb{C}}$, לכן נקבל:

$$d_{\mathbb{C}}=\frac{i}{k}$$

ולכן, לכל n נקבל שיש m הפרשים בין a_n לבין 1, ולכן

$$a_n=1+\frac{m}{k}i$$

(ג) הוכיחו שכל איברי הסדרה, למעט האיבר 1, נמצאים מחוץ למעגל היחידה.

פתרון: אחרי שקיבלנו $a_n = 1 + bi$, נקבל: $|a_n| = \sqrt{1+b^2} \geq 1$, לכן רק עבור

$$1 = 1 + 0i$$

נקבל על מעגל היחידה, וכל שאר המספרים נמצאים מחוץ למעגל היחידה.

3. הוכיחו:

(א) $\left(e^z\right)^2 = e^{2z}$

פתרון: נסמן $z = x + yi$, ונלך לפי הגדרה:

$$\left(e^z\right)^2 = \left(e^{x+yi}\right)^2 = \left(e^x \mathrm{cis} y\right)^2 = \left(e^x\right)^2 \mathrm{cis} 2y = e^{2x} \mathrm{cis} 2y = e^{2x+2yi} = e^{2z}$$

(ב) $\sin(2z) = 2\sin z \cos z$.

פתרון:

$$\sin(2z) = \frac{e^{i2z} - e^{-i2z}}{2i} = \frac{\left(e^{iz}\right)^2 - \left(e^{-iz}\right)^2}{2i}$$

נפתח את הצד השני:

$$2\sin z \cos z = 2 \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \cdot \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{\left(e^{iz}\right)^2 - \left(e^{-iz}\right)^2}{2i}$$

פתחנו את שני הצדדים וקיבלנו את אותו הדבר ולכן הם שווים.

4. מצאו את הפתרון הכללי של המד"ר $y' = 1 + x + y^2 + xy^2$.

פתרון: נסדר אותה כדי שתהיה פרידה:

$$y' = 1 + x + y^2(1+x) = (1+x)(y^2+1)$$

$$\frac{dy}{dx} = (1+x)(y^2+1)$$

$$\frac{dy}{y^2+1} = (1+x)dx$$

$$\int \frac{dy}{y^2+1} = \int (1+x)dx$$

$$\arctan(y) = x + \frac{x^2}{2} + c$$

$$y = \tan\left(x + \frac{x^2}{2} + c\right)$$

5. $y' = \sqrt{1-y^2} + e^x\sqrt{1-y^2}$

זו מד"ר פרידה:

$$y' = \sqrt{1-y^2} \cdot (1+e^x)$$

פתרונות סינגולריים: $y = \pm 1$. שאר הפתרונות:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2} \cdot (1+e^x)$$

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = (1+e^x)dx$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int (1+e^x)dx$$

$$\arcsin(y) = x + e^x + c$$

$$y = \sin(x + e^x + c)$$

6. $y'' - 2y' + 10y = x^2 + 1$

נפתור תחילה את ההומוגנית. הפולינום האופייני הוא:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 10$$

השורשים הם מרוכבים: $1+3i, 1-3i$. לכן הפתרון הוא מהצורה:

$$y_h = c_1 e^{1x}\cos 3x + c_2 e^{1x}\sin 3x$$

מנחשים פתרון פרטי מהצורה $y = ax^2 + bx + c$. הנגזרות הן:

$$y' = 2ax + b$$

$$y'' = 2a$$

ולכן נקבל:

$$2a - 2(2ax + b) + 10(ax^2 + bx + c) = x^2 + 1$$

השוואת מקדמים:

$$\begin{cases} 10a = 1 & a = \frac{1}{10} \\ -4a + 10b = 0 & b = \frac{4}{100} \\ 2a - 2b + 10c = 1 & \end{cases}$$

נסדר את המשוואה השלישית:

$$\frac{20}{100} - \frac{8}{100} + 10c = 1$$

$$c = \frac{11}{125}$$

ולכן:

$$y_p = \frac{1}{10}x^2 + \frac{4}{100}x + \frac{11}{125}$$

ובסה"כ:

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{1x} \cos 3x + c_2 e^{1x} \sin 3x + \frac{1}{10}x^2 + \frac{4}{100}x + \frac{11}{125}$$