<u>פתרון תרגיל 9</u>

<u>פתרון:</u>

$$A^2=\begin{pmatrix}-2&0&4\\5&0&-10\\-1&0&2\end{pmatrix},\ A^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

לכן נילפוטנטית מסדר 3, לכן $\operatorname{Im}A^2\subseteq KerA\cap\operatorname{Im}A\subseteq KerA$. ה-rank של A^2 הוא 1. ו-KerA=2. לכן מספיק למצוא בסיס ל- $\operatorname{Im}A^2$ ולהשלמים לבסיס של $KerA$. סה"כ מקבלים:

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&-3&-16\\0&-1&-5\\1&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&2&-2\\-16&-5&7\\3&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&6&1\\5&-16&0\\-1&3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

<u>תרגיל 5</u> כנ"ל עבור $A=\begin{pmatrix}10&1&-1\\2&9&-1\\6&3&5\end{pmatrix}$

פתרון: פ"א $(x-8)^3$, מחסרים 8, מקבלים נילפוטנטית ופותרים כמו הקודמות. מקבלים בסוף:

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&-1/4&1/4\\1&1/2&-1/2\\0&3/2&-1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10&1&-1\\2&9&-1\\6&3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\2&0&1\\6&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&1&0\\0&8&0\\0&0&8\end{pmatrix}.$$

תזכורת: עבור אופרטור T, המרחב העצמי המוכלל K_λ: (הכל בהנחה שהפ"א מל"ל)

1. הגדרה: $K_\lambda=Ker\,(T-\lambda I)^n$ (באשר $n=\dim V$).
2. יהי λ ע"ע של T ונסמן ב- T_0 את הצמצום של T ל- K_λ. אזי $f_{T_0}=(x-\lambda)^m$ באשר $m=\dim K_\lambda$.
3. $\dim K_\lambda$ הוא הר"א של הע"ע λ
4. אם ל- T ע"ע $\lambda_1,..,\lambda_t$ אז $V=K_{\lambda_1}\oplus\ldots\oplus K_{\lambda_t}$.
5. מסקנה: משפט ג'ורדן

דוגמא תהי $A=\begin{pmatrix}2&2&-1\\3&-5&4\\6&-14&10\end{pmatrix}$. מצא את צורת ג'ורדן J של A ומטריצה הפיכה P כך ש-
$P^{-1}AP=J$.

פתרון

ראשית נמצא את הפולינום האופייני:

$$\det\begin{pmatrix}x-2&-2&1\\-3&x+5&-4\\-6&14&x-10\end{pmatrix}=(x-2)(x+5)(x-10)-48-42+6(x+5)+56(x-2)-6(x-10)$$
$$=x^3-7x^2+16x-12$$

נחשב שורשים רציונליים: מועמדים אפשריים הם המחלקים של 12, כלומר $\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm12$.
נציב אותם ונראה כי 2 מאפס את הפולינום, לכן נבצע חילוק פולינומים:

$\frac{x^3-7x^2+16x-12}{x-2}=x^2-5x+6$ ו- $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ לכן סה"כ:
$f_A(x)=(x-2)^2(x-3)$.

הר"א של הע"ע 3 הוא 1 לכן (לפי תכונה 3 לעיל) בסיס ל- K_3 יהיה פשוט וקטור עצמי של A: נחפש פתרון ל- $(A-3I)v=0$ ונקבל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1&2&-1&0\\3&-8&4&0\\6&-14&7&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-1&2&-1&0\\0&-2&1&0\\0&-2&1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-1&2&-1&0\\0&-2&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

כלומר $2y=z$ (מהשורה האמצעית) ולכן $x=0$ (מהשורה הראשונה) לכן כל הו"ע הם מהצורה $(0,t,2t)$ עבור $t\in\mathbb{R}$. נבחר למשל $\boxed{w=(0,1,2)}$.

הר"א של הע"ע 2 הוא 2 לכן (לפי תכונה 3 לעיל) $\dim K_2=2$.

$(A-2I)v$, $(A-2I)^2v$ ניקח

$(A-2I)^2v=0$

בתרגום ללשון מטריצות, זה אומר שמסתכלים על החיתוך של imT עם K_2 כלומר מחפשים וקטורים v,u כך ש-
$$\begin{matrix}(A-2I)^2u=0\\v=(A-2I)u\end{matrix}\quad *$$

ראשית נחשב את $Null\,(A-2I)^2$.

$(A-2I)^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\3&-1&1\\6&-2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&0&0\\3&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ לכן הוקטורים ב- $Null$ הם מהצורה (x,y,z) באשר

$3x-y+z=0$. (2 דרגות חופש). נבחר למשל $x=0, y=1$ ונקבל $z=1$ כלומר הוקטור

$\boxed{u=(0,1,1)}$. כעת נמצא את v: $v=(A-2I)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ כלומר $v=\begin{pmatrix}1\\-3\\-6\end{pmatrix}$.

נשים את הוקטורים שמצאנו במטריצה:

$P=(v,\ u,\ w)=\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&1&1\\-6&1&2\end{pmatrix}$.

נחשב את ההפכית: $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-1\\3&-1&1\end{pmatrix}$.

נחשב: $\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&1&1\\-6&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&-1\\3&-5&4\\6&-14&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-1\\3&-1&1\end{pmatrix}=P^{-1}AP$ ומצאנו את צורת ג'ורדן.

פתרון התרגילים במ"פ:

1. יהי $v\in V$ אזי מתקיים $\langle\vec{0},v\rangle = \langle\vec{0}\cdot v,v\rangle = 0\langle v,v\rangle = 0$

ומצד שני $\langle v,\vec{0}\rangle = \overline{\langle\vec{0},v\rangle} = \bar{0} = 0$

2. המכפלה אינה סימטרית:

$$\left\langle \binom{1}{0},\binom{1}{1}\right\rangle = 1\cdot0+7\cdot1\cdot1 = 7 \neq 1 = 1\cdot1+7\cdot1\cdot0 = \left\langle \binom{1}{1},\binom{1}{0}\right\rangle$$

3. $$\langle(x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = x_1y_1-3x_1y_2-3x_2y_1+\alpha x_2y_2 =$$

$$(x_1\ x_2)\begin{pmatrix}1 & -3\\ -3 & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$

לפי הכלל המשפט, מינורים מ"ה אמ"מ $(1>0,\alpha>0)$ ו $(\alpha-9>0)$

כלומר עבור $\alpha>9$.

4. מתקיים $$\langle v_1+v_2+v_3+v_4, v_1+v_2+v_3+v_4\rangle = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\langle v_i,v_j\rangle =$$

$$\sum_{i=1}^{4}\langle v_i,v_i\rangle + \sum_{i=1}^{4}\sum_{j\neq i}^{4}\langle v_i,v_j\rangle = 4\cdot3+4\cdot3(-1) = 0$$

ולפי אי שליליות נסיק $v_1+v_2+v_3+v_4=0$.

5 (א) $$\|u+v\|^2-\|u-v\|^2 = \left(\|u\|^2+2Re(u,v)+\|v\|^2\right)-\left(\|u\|^2-2Re(u,v)+\|v\|^2\right) = 4Re(u,v)$$

כלומר: $$\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2\right) = Re(u,v)$$

אם V מרחב אוקלידי הרי לכל $u,v\in V$ המכפלה הפנימית (u,v) מספר ממשי לכן: $Re(u,v)=(u,v)$ ונקבל את הדרוש.