

## תרגיל מספר 2

תאריכי הגשה: בשבוע המתחיל ב-3.11 לידי המתרגל בלבד.

נא לכתוב על התרגילים שם, ת.ז. ומספר קבוצה!

הערה: שימו לב שלעיתים מסמנים את החבורה  $Z_n = \{0,1,\dots,n-1\}$  כ-  $Z/nZ$ .

### שאלה 1:

בדקו עבור כל קבוצה עם פעולה היא חבורה למחצה, מונואיד או חבורה ואם הפעולה היא אבלית או לא.

(א)  $(Z, -)$  (קבוצת המספרים השלמים עם פעולת החיסור)

(ב)  $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in R, a^2 + b^2 > 0 \right\}$  עם פעולת כפל מטריצות.

(ג) הקבוצה  $H = \{(x,y) \in Z \times Z \mid x^2 - 3y^2 = 1\}$  עם הפעולה  $(x,y)^*(z,w) = (xz+3yw, xw+yz)$ .

(ד)  $(R \setminus Q, +)$  (קבוצת המספרים האי-רציונליים עם פעולת החיבור).

### שאלה 2:

תהי  $B$  תת-קבוצה של  $R$ . נסמן  $B' = \{s+tx : s, t \in B\}$  ויהי  $A = B' \setminus \{0\}$ , עם כלל הכפל  $(s+tx)(u+vx) = (su+2vt) + (sv+tu)x$ . עבור  $Z_5, Z_7, Z_5, Z_7$ . האם  $A$  היא חבורה כפלית?

שימו לב: כש-  $B = Z/5Z$  or  $Z/7Z$  אזי את הביטויים מצד ימין (בהגדרת כלל הכפל) אנו ניקח  $\text{mod } 5$  או  $\text{mod } 7$  בהתאמה. (רמז: למה ניתן לחשוב על  $x$  כעל " $\sqrt{2}$ "?)

### שאלה 3:

(א) נסמן ב-  $R$  את קבוצת המספרים הממשיים. תהי

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & A & B \\ 0 & 1 & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid A, B, C \in R \right\}$$

הוכח ש-  $G$  היא חבורה ביחס לכפל מטריצות. האם היא אבלית? (ב) תהיינה  $(G, \cdot), (H, *)$  חבורות. נגדיר פעולה  $+$  על המכפלה הקרטזית  $G \times H$  כדלהלן:

$$(g_1, h_1) + (g_2, h_2) = (g_1 \cdot g_2, h_1 * h_2)$$

הוכיחו כי  $G \times H$  היא חבורה תחת פעולה זו.

#### שאלה 4:

יהי  $(M, *)$  מונואיד שלכל איבר בו יש הפיך מימין. אני טוען.....  $(M, *)$  חבורה. האם אני שקרן או דובר אמת? (הוכיחו או הפריכו)

#### שאלה 5:

יהי  $F$  שדה, ונסתכל על  $V = F^N = \{(x_1, x_2, \dots) : x_i \in F\}$  (ז"א – האיברים ב- $V$  הם וקטורים אינסופיים). נסמן  $\text{Hom}(V) = \{T: V \rightarrow V : T \text{ is a linear transformation}\}$  (א) הוכיחו ש- $\text{Hom}(V)$  עם פעולת ההרכבה היא מונואיד. (ב) יהיו

$$U: (x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots)$$

$$D: (x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots)$$

שני איברים ב- $\text{Hom}(V)$ . האם ל- $D$  או ל- $U$  יש הפיך מימין או משמאל?

#### שאלה 6:

יהי  $G$  מונואיד,  $k$  מספר טבעי. נסמן:

$$G^k = \{g^k \mid g \in G\}$$

(א) הוכח כי אם  $G$  אבלית, אזי  $G^k$  מונואיד אבלי.  
(ב) אילו דרישה מהדרישות עבור מונואיד לא מתקיימת לגבי  $G^k$ , אם  $G$  אינה אבלית?  
(ג) הוכח כי אם בנוסף  $G$  חבורה אבלית, אז  $G^k$  גם חבורה אבלית.

#### שאלה 7:

(א) תהי  $S$  קבוצה,  $A = P(S)$  קבוצת החזקה (ז"א –  $A$  היא קבוצה שכל איבר בה הוא תת-קבוצה של  $S$ ). נגדיר פעולה על  $A$  כך:  $a \cdot b = a \cap b$ . האם  $(A, \cdot)$  הוא מונואיד? חבורה?  
(ב) מצאו מונואיד  $(X, \cdot)$  עם אינסוף איברים כך שעבור כל איבר  $a^2 = a, a \in X$  (כש- $a^2 = a \cdot a$ ).

#### שאלה 8:

נגדיר על הטיבעיים  $N$  את הפעולה הבינארית הבאה, הנקראת הפעולה המעגלית:

$$a \circ b = a + b + ab$$

הוכח כי  $(N, \circ)$  היא חבורה למחצה אבלית.

