# תרגול 12 - אנליזה מודרנית

**משפט** (הרחבה למשפט היסודי של החדו"א א'): תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}^*$ אינטגרבילית ונגדיר $F(x)=\int_a^x f(t)\,dm(t)$. אזי $F(x)$ רציפה בהחלט, $F'(x)$ קיימת כב"מ ומתקיים $F'(x)=f(x)$ כב"מ.

**תזכורת**: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ נקראת רציפה בהחלט אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $\{[a_k,b_k]\}_{k=1}^n$ הם קטעים זרים שסכום אורכם קטן מ- $\delta$ אזי $\sum_{k=1}^n |f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon$.

<u>הגדרה:</u> נאמר כי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ מקיימת את **תנאי ליפשיץ**, אם יש קבוע $L$ כך שלכל $x,y\in[a,b]$ מתקיים $|f(x)-f(y)|\le L|x-y|$.

<u>תרגיל:</u>

א. הוכיחו כי אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ מקיימת את תנאי ליפשיץ, אזי היא רציפה בהחלט.

ב. נניח כי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ היא ממחלקה $C^1$ (גזירה ברציפות). הוכיחו כי היא מקיימת את תנאי ליפשיץ.

<u>פתרון:</u>

א. יהי $\varepsilon>0$. נניח כי $\{[a_k,b_k]\}_{k=1}^n$ הם קטעים זרים שסכום אורכם קטן מ- $\delta=\frac{\varepsilon}{L}$, אם כך

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k)-f(a_k)|\le\sum_{k=1}^n \left|L|b_k-a_k|\right|<\varepsilon$$

ב. מהנתון $f'$ רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ ולכן חסומה שם ( $|f'(x)|\le M$ ). יהיו $x,y\in[a,b]$ כלשהם, ע"פ משפט הערך הממוצע של לגראנז' מתקיים
$|f(x)-f(y)|=|f'(\xi)(x-y)|=|f'(\xi)||x-y|\le M|x-y|$ עבור $\xi$ כלשהו בין $x$ ל- $y$.

וזהו בדיוק תנאי ליפשיץ. (בעתיד נוכיח את ב' עם הנחות מקלות יותר).

<u>תרגיל ממבחן (תשע"א):</u>

2. א. הגדירו פונקציה רציפה בהחלט על קטע ב- $\mathbb{R}$

ב. צטטו את הכללת לבג ל"משפט היסודי של חשבון אינטגרלי" (שני חלקים)

ג. תהי $E\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה מדידה לבג, ותהי $I_E$ האינדיקטור של $E$. הוכיחו שלכמעט כל $a\in E$ (ביחס למידת לבג) $\lim\limits_{h\to0^+}\frac{1}{2h}\int\limits_{a-h}^{a+h}I_E\left(x\right)dm=1$

פתרון סעיף ג:

נסתכל על הפונקציה $F_n\left(x\right)=\int\limits_n^x 1_E\,dm$ המוגדרת לכל $x\in[n,n+1]$. ע"פ הכללת לבג למשפט היסודי חלק א', $F_n$ גזירה כב"מ ו $F_n'\left(x\right)=I_E\left(x\right)$ כב"מ בקטע $[n,n+1]$. נסמן את הקבוצה ב $[n,n+1]\cap E$ שבה $F_n'\left(x\right)\neq I_E\left(x\right)$ ב $D_n$ וברור כי $m\left(D_n\right)=0$. כעת, עבור כמעט כל $a\in[n,n+1]\cap E$ מתקיים

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0^+}\frac{1}{2}\left(\frac{F_n\left(a+h\right)-F_n\left(a\right)}{h}+\frac{F_n\left(a\right)-F_n\left(a-h\right)}{h}\right)\\&=\lim_{h\to0^+}\frac{1}{2h}\left(F_n\left(a+h\right)-F_n\left(a-h\right)\right)=\lim_{h\to0^+}\left(\frac{1}{2h}\int\limits_n^{a+h}1_E\,dm-\frac{1}{2h}\int\limits_n^{a-h}1_E\,dm\right)\\&=\lim_{h\to0^+}\frac{1}{2h}\int\limits_{a-h}^{a+h}1_E\,dm=F_n'\left(a\right)\end{aligned}$$

ולכן, עבור כמעט כל $a$ מתקיים $F'\left(a\right)=1$. הקבוצה של ה $a$-ים ב $E$ שעבורה $\lim\limits_{h\to0^+}\frac{1}{2h}\int\limits_{a-h}^{a+h}I_E\left(x\right)dm\neq1$ לא מתקיים, מוכלת ב $\bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty}D_n$ וכמובן ש $m\left(\bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty}D_n\right)=0$ ולכן מתקיים כמעט עבור כל $a\in E$ $\lim\limits_{h\to0^+}\frac{1}{2h}\int\limits_{a-h}^{a+h}I_E\left(x\right)dm=1$.

**משפט** (הרחבה למשפט היסודי של החדו"א ב'): תהי $f$ מוגדרת ורציפה בהחלט ב $[a,b]$. אזי $f'\left(x\right)$ קיימת כב"מ ב $[a,b]$ ואינטגרבילית שם, ומתקיים

$$\int\limits_a^b f'\left(x\right)=f\left(b\right)-f\left(a\right).$$

תרגיל:

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה. האם בהכרח קיים קטע בו $f$ מונוטונית?

פתרון: התשובה שלילית. באינפי' בונים פונקציות רציפות שאינן גזירות בשום נקודה (למשל פונקציית ויירשטראס).

ניקח את $f$ להיות כזו, לצורך דוגמא נגדית. אילו היה קטע $I \subseteq \mathbb{R}$ שבו $f$ מונו', משפט הגזירה של לבג היה אומר כי $f$ גזירה כב"מ בקטע – אך זה לא ייתכן!

<u>תזכורת:</u> אם $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ , $P|[a,b]$ (P חלוקה של $[a,b]$ ) ע"י הנקודות $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ מגדירים את <u>ההשתנות של f ביחס ל-P</u> ע"י $v(f,P) = \sum_{k=1}^{n} \left| f(x_k) - f(x_{k-1}) \right|$ , ואת <u>ההשתנות הטוטאלית של f בקטע [a,b]</u> ע"י

$$T_a^b[f] = \sup\left\{ v(f,P) : P|[a,b] \right\}$$

<u>הגדרה:</u> אם $T_a^b[f] < \infty$ אומרים ש-f בעלת השתנות חסומה בקטע. מרחב כל הפונקציות בעלות השתנות חסומה הוא $BV([a,b]) = \left\{ f : T_a^b[f] < \infty \right\}$.

1. <u>תרגיל:</u> תהי $D:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציית דיריכלה, $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} = I_{\mathbb{Q}}(x)$ הוכיחו שבכל קטע $[a,b]$ (קטע עם אורך חיובי!) מתקיים $T_a^b[D] = \infty$

<u>פתרון:</u> יהי $N$ טבעי. על סמך צפיפות הרציונליים והאי-רציונליים בקטע, נוכל לבנות חלוקה $P_N : a = x_0 < x_1 < \ldots x_N = b$ "מתחלפת" – זאת אומרת שהנקודות הן מתחלפות בין רציונליות לאי-רציונליות לסירוגין (לפחות בלי הקצוות, שם אין לדעת). נחשב את ההשתנות:
$v(D,P_N) = \sum_{k=1}^{N} \left| D(x_k) - D(x_{k-1}) \right| \ge \sum_{k=2}^{N-1} \left| D(x_k) - D(x_{k-1}) \right| = \sum_{k=2}^{N-1} 1 = N-3$. אם כך הקבוצה $\left\{ v(D,P) : P|[a,b] \right\}$ מכילה מספרים גדולים כרצוננו ולכן $\sup\left\{ v(D,P) : P|[a,b] \right\} = \infty$ .

2. <u>תרגיל:</u> הוכיחו כי הפונקציה $f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ אינה בעלת השתנות חסומה בקטע $[0,1]$ .

פתרון: צריכים לתפוס את התנודות של הפונקציה. $\sin\frac{1}{x}$ מחזירה $+1$ בנקודות $x_k = \frac{2}{\pi + 4\pi k}$ ומחזירה $-1$ בנקודות $x_k = \frac{2}{3\pi + 4\pi k}$. לכל $N$ נגדיר שוב חלוקה "מתחלפת"

$$P_N : \frac{2}{\pi} > \frac{2}{3\pi} > \ldots > \frac{2}{\pi + 4\pi k} > \frac{2}{3\pi + 4\pi k} > \ldots > \frac{2}{\pi + 4\pi N} > \frac{2}{3\pi + 4\pi N}$$

מקבלים

$$
\begin{aligned}
&v\left(f,P_N\right)\geq\\
&\left|\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{2}{3\pi}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right|+\ldots+\left|\frac{2}{\pi+4\pi k}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)-\frac{2}{3\pi+4\pi k}\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)\right|+\\
&\ldots+\left|\frac{2}{\pi+4\pi N}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi N\right)-\frac{2}{3\pi+4\pi N}\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi N\right)\right|=\\
&=\left|\frac{2}{\pi}+\frac{2}{3\pi}\right|+\ldots+\left|\frac{2}{\pi+4\pi k}+\frac{2}{3\pi+4\pi k}\right|+\ldots+\left|\frac{2}{\pi+4\pi N}+\frac{2}{3\pi+4\pi N}\right|=\\
&=\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{2}{\pi+4\pi k}+\frac{2}{3\pi+4\pi k}\right)=\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{N}\frac{2k+1}{\left(4k+1\right)\left(4k+3\right)}
\end{aligned}
$$

וכאשר $N\to\infty$ מקבלים טור מתבדר. מכאן ה-sup הוא אינסוף.