

מבוא לפיזיקה מודרנית  
מבוא לתורת הקוונטים

## מודל האטום של בוהר

### הבעיה האלקטרוסטטית של מודל האטום הגרעיני

ההבנה (בעקבות ניסויי רתרפורד) שלאטום גרעין חיובי קטן הציבה בעיה חדשה: הגרעין קטן בהרבה מהאטום, כך שנראה שגודל האטום נקבע ע"י האלקטרונים שבו. אך האלקטרונים צריכים להמשיך אלקטרוסטטית עד אל הגרעין, כך שגודל האטום צריך להיות בערך פמטומטר ( $10^{-15}$  m) ולא אנגסטרם ( $10^{-10}$  m). (זה שגודל האטום הוא אנגסטרם היה ידוע מצפיפות החומר במוצקים.) אז יש צורך לאזן את המשיכה האלקטרוסטטית בין הגרעין והאלקטרונים במרחק של אנגסטרם. מנגנון ידוע לכך הוא תנועה מעגלית, כמו במערכת השמש.

הבעיה עם מודל זה היא שהיה ידוע שאלקטרונים בתנועה מעגלית פולטים קרינה אלקטרומגנטית בתדירות התנועה שלהם. ניתן לחשב ולהראות שהאלקטרון יאבד את כל האנרגיה הקינטית שלו ויפול אל הגרעין בתוך כ- $10^{-6}$  s, תוך שתדירות הקרינה הולכת וגדלה עם הקטנת הרדיוס.

### המודל של בוהר

ב-1913 הפיזיקאי הדני נילס בוהר (Niels Bohr) הציע מודל של האטום בו הוא פשוט הניח כי בשל סיבה בלתי ידועה כלשהי, מסלול האלקטרון יכול לקבל אך ורק רדיוסים מסוימים סביב הגרעין.

ניתן לראות בהנחה זו של בוהר קוונטיזציה של רדיוס מסלול האלקטרון.

כלומר, בדומה לגדלים רבים במכניקת הקוונטים, רדיוס מסלול הלקטרון אינו יכול לקבל כל ערך, אלא רק ערכים דיסקרטיים מסוימים.

שימו לב שבמקום להתייחס לבעיה כאל בעיה, בוהר קיבל אותה כנתון, ומכאן יכול היה להתקדם ולחזות תחזיות שונות של המודל שלו. ישנו בכך דמיון רב לצורה בה התייחס איינשטיין לבעית קביעות מהירות האור שנבעה ממשוואות מקסוול ומניסוי מייקלסון מורלי: איינשטיין קידם את קביעות מהירות האור למעמד של עקרון במקום לראות בה בעיה, ומכאן הוא גזר את כל תורת היחסות.

כעת יכול היה בוהר להסביר את **הספקטרום האטומי** הדיסקרטי (אותו ראינו בהדגמת מנורת כספית, למשל).

לשם כך, בוהר הניח הנחה נוספת: כאשר האלקטרון עובר מרדיוס אחד בו האנרגיה שלו היא  $E_i$  לרדיוס אחר בו יש לו אנרגיה  $E_f$ , הוא **פולט אור בתדירות  $f$**  כך שמתקיים

$$hf = E_i - E_f$$

יחס זה הוא פשוט שימור אנרגיה ועוד ההנחה של פלאנק. אך שימו לב שפלאנק קיבל את זה שתדירות האור  $f$  שווה לתדירות האוסצילטור שבחומר. לעומת זאת, במודל בוהר אין שום קשר בין תדירות תנועת האלקטרון ותדירות האור. הקשר הוא בין תדירות האור להפרש האנרגיה בין מסלולי האלקטרון בלבד.

בשל הקשר בין המסלול לאנרגיה של האלקטרון, כל מסלול כזה נקרא גם "**רמת אנרגיה**", או פשוט "רמה".

כדי למצוא את רדיוסי התנועה, בוהר הניח הנחה נוספת: **בגבול של רדיוסים גדולים ואנרגיות גבוהות, החישובים הקוונטים צריכים לתת את התוצאות הקלאסיות.**

הנחה זו ידועה בתור **עקרון ההתאמה (Correspondence principle)**. הסיבה לעקרון היא

- נכונות התוצאות הקלאסיות אינה מוטלת בספק עבור מערכות מאקרוסקופיות.
- התיקונים הקוונטיים נחוצים רק במערכות מיקרוסקופיות (אטומים, פוטונים).

- לכן, אם אנו מנסים לפתח תורה קוונטית שתהיה נכונה עבור כל המערכות, עליה לתת את התוצאות הקלאסיות עבור מערכות מאקרוסקופיות – במקרה זה, מאקרוסקופית פירושה רדיוסים גדולים ואנרגיות גבוהות של האלקטרון.

בוהר הראה שהנחותיו מביאות לכך שהתנע הזויתי של האלקטרון חייב להיות כפולות שלמות של

$$\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$$

כיום נהוג להפוך את הלוגיקה של ההוכחה ולהתחיל מהנחת הקוונטיזציה של תנע זויתי, וממנה לקבל את עקרון ההתאמה עבור מקרה פרטי זה. אנו נלך בדרך זו.

**נתבונן באטום שלגרעין שלו מטען חיובי Ze ושיש לו אלקטרון אחד** (כלומר, אטום מימן או אטום כבד יותר מיון מכל שאר האלקטרונים שלו).

כאשר האלקטרון נמצא במרחק  $r$  מהגרעין, האנרגיה הפוטנציאלית שלו היא  $V \equiv -\frac{k_E e^2 Z}{r}$

סך כל האנרגיה היא סכום האנרגיה הקינטית והפוטנציאלית:

$$E = K + V = \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{k_E e^2 Z}{r}$$

שוויון בין כוח קולון והכוח הצנטריפוגלי נותן  $\frac{k_E e^2 Z}{r^2} = m_e \frac{v^2}{r}$ ,

אז מקבלים קשר בין האנרגיה הקינטית והאנרגיה הפוטנציאלית,

$$K = -\frac{1}{2} V, \quad \text{כלומר,} \quad \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{1}{2} \frac{k_E e^2 Z}{r}$$

מכאן מוצאים גם את מהירות האלקטרון:

$$v^2 = \frac{k_E e^2 Z}{m_e r} \quad .1$$

מאחר ש-  $K = -\frac{1}{2} V$ , אז האנרגיה הכללית היא  $E = \frac{1}{2} V = -\frac{1}{2} \frac{k_E e^2 Z}{r}$

אז לפי ההנחה השנייה של בוהר, תדירות האור שנפלט במעבר האלקטרון בין רמות אנרגיה של

שני מסלולים בעלי רדיוסים  $r_b$   $r_f$  היא

$$f = \frac{E_i - E_f}{h} = -\frac{1}{2} \frac{k_E e^2 Z}{h} \left( \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f} \right) \quad 2.$$

שימו לב לדמיון לנוסחה של רידברג,  $f = \frac{c}{\lambda} = Rc \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$

אנו רוצים לקבל נוסחה זו, אז על הרדיוס להיות פרופורציונלי לריבוע של מספר טבעי. זה יתקבל מתנאי הקוונטיזציה של תנע זוויתי:

התנע הזוויתי הוא  $m_e v r = n \hbar$ , כאשר  $n$  הוא מספר טבעי.

אז מהירות האלקטרון היא  $v = \frac{n \hbar}{r m_e}$

נשתמש בכך כדי להחליף את המהירות במשוואה 1:

$$v^2 = \left( \frac{n \hbar}{r m_e} \right)^2 = \frac{k_E e^2 Z}{r m_e}$$

ומכאן נמצא את הרדיוס

$$r = n^2 \frac{\hbar^2}{m_e k_E e^2 Z} = n^2 \frac{a_0}{Z} \quad 3.$$

כאשר הגדרנו את רדיוס בוהר  $a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e k_E e^2} = 0.529 \text{ \AA}$

זהו רדיוס מסלול האלקטרון עבור מימן ברמה  $n=1$ .

שימו לב שזה מסדר הגודל שהיה ידוע עבור גודל האטום.

כמו כן, שימו לב שקיבלנו במשוואה 3 את הקשר שרצינו בין הרדיוס ומספר טבעי בריבוע.

נציב את  $r$  ממשוואה 3 במשוואה 2, ונקבל את נוסחת רידברג,

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{v}{c} = Z^2 \frac{m_e k_E^2 e^4}{2 \pi \hbar^3} \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) = Z^2 R \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

כאשר  $R = \frac{m_e k_E^2 e^4}{2 \pi \hbar^3}$  הוא הצפי של בוהר עבור קבוע רידברג.

מאחר ש-R היה ידוע היטב ממדידות ספקטרוסקופיות מדויקות, בוהר הציע להשתמש בנוסחה זו

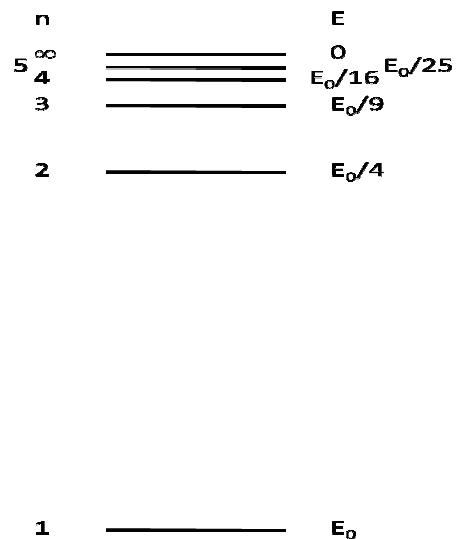
כדי למצוא במדויק את ערכי הקבועים האחרים בביטוי.

נציב את הביטוי לרדיוס (משוואה 3) בביטוי לאנרגיה, ונקבל שערכי האנרגיה המותרים עבור

$$E_n = -\frac{m_e k_E^2 e^4}{2\hbar^2} \frac{Z^2}{n^2} = -E_0 \frac{Z^2}{n^2} \quad \text{אטום המימן הם}$$

$$E_0 = \frac{m_e k_E^2 e^4}{2\hbar^2} = 13.6 \text{ eV} \quad \text{כאשר}$$

נקראת אנרגית היוניזציה או אנרגית הקשר של המימן – האנרגיה הדרושה כדי ליינן את האלקטרון שנמצא במצב האנרגיה הנמוך ביותר, כלומר, לעבור מהמצב  $n=1$  למצב  $n=\infty$ . רמות האנרגיה נראות כך:



שם נפוץ לרמה  $n=1$  הוא רמת K, והרמה עם  $n=2$  נקראת רמת L.  $n=3$  נקראת רמת M, וכו'.

מעברים בין רמות אלה גורמים לפליטת הקוים הספקטרליים.

בזמן שבוהר פרסם את מאמרו, היו ידועות שתי סדרות של קוים ספקטריים עבור מימן:

הסדרה של Balmer עם  $n_f = 2$  וזו של Paschen עם  $n_f = 3$ .

רק סדרות אלה נותנות אור נראה.

ב-1916 מצא Lyman את הסדרה הנקראת על שמו, עם  $n_f = 1$ , באולטרא סגול.

ב-1922 ו-1924 מצאו Brackett ו-Pfund את הסדרות של  $n_f = 4, 5$ , באינפרא אדום.

## הגבול הקלאסי: עקרון ההתאמה

תנאים קלאסיים אמורים להתקבל כאשר האלקטרון עובר בין שתי רמות סמוכות כאשר  $n \gg 1$ . אז נתבונן בתדירות האור עבור מעבר זה, לפי מודל בוהר:

$$f_{Bohr} = Z^2 \frac{m_e k_E^2 e^4}{2\pi\hbar^3} \left( \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \right) = Z^2 \frac{m_e k_E^2 e^4}{2\pi\hbar^3} \left( \frac{2n-1}{n^2(n-1)^2} \right) \approx Z^2 \frac{m_e k_E^2 e^4}{2\pi\hbar^3} \frac{2}{n^3}$$

, כאשר בשוויון האחרון הזנחנו את 1 לעומת n.

לפי אלקטרומגנטיות קלאסית, תדירות האור שווה לתדירות סיבוב האלקטרון סביב הגרעין.

תדירות זו היא  $f_{classical} = \frac{v}{2\pi r}$ , כאשר v מהירות האלקטרון.

מצאנו מתנאי הקוונטיזציה של תנע זוויתי שהמהירות היא:  $v = \frac{n\hbar}{rm_e}$ ,

וגם שהרדיוס הוא  $r = n^2 \frac{\hbar^2}{m_e k_E e^2 Z}$ .

נציב זאת בביטוי לתדירות הקלאסית ונקבל

$$f_{classical} = \frac{n\hbar}{2\pi m_e \left( n^2 \frac{\hbar^2}{m_e k_E e^2 Z} \right)^2} = Z^2 \frac{m_e k_E^2 e^4}{2\pi\hbar^3} \frac{2}{n^3}$$

שזה בדיוק מה שקיבלנו מהנוסחה הקוונטית.

כלומר, **הראינו את עקרון ההתאמה עבור מקרה זה:**

לפי אלקטרומגנטיות קלאסית, אלקטרון ברדיוס גדול נע בתדירות f סביב הגרעין.

הוא פולט קרינה בתדירות זו ולכן מאבד אנרגיה, ורדיוס הסיבוב שלו הולך וקטן.

נכונות התיאור הזה (עבור מרחקים גדולים) אינה מוטלת בספק ומאוששת ע"י ניסויים.

מודל בוהר נותן את אותה תוצאה תצפיתית: גם לפי מודל זה, אלקטרון ברדיוס גדול פולט קרינה

באותה תדירות כמו זו שנחזית ע"י אלקטרומגנטיות קלאסית.

אלא שהתאור המיקרוסקופי שנותן מודל בוהר שונה:  
לפי מודל זה, האלקטרון פולט קרינה זו ע"י מעבר לרדיוס המותר הסמוך.  
מאחר שהרדיוסים קרובים מאוד (כי  $n \gg 1$ ), המעבר הדיסקרטי נראה רציף.

בנוסף, מודל בוהר מסביר התנהגות קוונטית ב-  $n$  קטן, שהתורה הקלאסית לא יודעת להסביר:

- יציבות אטום המימן ( $n$  הקטן ביותר הוא 1)
- ספקטרום דיסקרטי (עבור  $n$  קטן) לפי נוסחת רידברג

עם זאת, יש לציין שמודל בוהר אינו מודל קוונטי במלואו – הוא משלב מושגים קוונטים (קוונטיזציה של תנע זוויתי) עם גדלים קלאסיים (עבור הכוח הצנטריפוגלי, כוח קולון, התנע הזוויתי).

מודל בוהר גם אינו אומר איך לחשב את הספק הקרינה שפולט אלקטרון עבור  $n \gg 1$ , בשעה שכן ניתן לחשב הספק זה באלקטרודינמיקה קלאסית.

עם זאת, מודל בוהר נותן תוצאות נכונות עבור תצפיות שקשורות באטום המימן, והיתה לו חשיבות גדולה בהבנת מבנה האטום.  
בנוסף, עקרון ההתאמה שניסח בוהר מהווה עקרון חשוב גם בתורת הקוונטים המלאה, שפותרת את החסרונות של מודל בוהר.

## שיפורים של מודל בוהר: התייחסות לתנועת הגרעין

בפיתוח מודל בוהר הנחננו שהגרעין נייח, כלומר, שהוא כבד בהרבה מהאלקטרון.  
מאחר שניתן למדוד את אורך הגל של האור הנפלט בדיוק רב, ניתן לבצע מדידות שעבורן הנחה זו אינה מדויקת.

כידוע ממכניקה, ניתן לקחת את מסת הגרעין הסופית בחשבון ע"י החלפת מסת האלקטרון בכל

$$\mu = \frac{m_e m_n}{m_e + m_n}$$

הביטויים במסה האפקטיבית

תיקון זה מביא לתחזיות מדויקות יותר עבור מודל בוהר, שמתאימות לתוצאות הנסיוניות.

## מסלולים אליפטיים והמבנה העדין (Find structure)

בחישוב הנחנו שמסלולי האלקטרון מעגליים. אבל פתרון החוק השני של ניוטון עבור כוח  $1/r^2$  מאפשר גם מסלולים אליפטיים. ניתן להראות שזמן המחזור הקלאסי והתנע הזויתי תלויים רק באורך הציר הראשי של האליפסה (הקו המחבר את שני המוקדים), כך שהמאפיינים המדידים (תדירות, אנרגיה בוהר) של מסלולים אלה זהים לאלו של מסלולים מעגליים עם קוטר השווה לאורכו של הציר הראשי.

בכל זאת, כאשר המסלול מאוד אליפטי, בחלק מהמסלול מהירות האלקטרון גדולה יותר ביחס למסלול מעגלי, ואז נכנסים תיקונים יחסותיים למודל בוהר.

נראה מהי מהירות האלקטרון ברמה הראשונה:

$$m_e v r = \hbar$$

$$r = 1^2 \frac{\hbar^2}{m_e k_E e^2 Z}$$

נציב את הרדיוס

אז

$$v = \frac{\hbar}{m_e r} = \frac{k_E e^2 Z}{\hbar}$$

$$\frac{v}{c} = \frac{k_E e^2 Z}{\hbar c} = \frac{14.4 \text{ eV } \cdot Z}{1973 \text{ eV } \cdot Z} \approx \frac{1}{137} Z$$

ניתן לראות שעבור  $Z$  גדול מספיק, המהירות גדולה וצריכים להיות תיקונים יחסותיים לתחזיות של בוהר.

זומרפלד (Sommerfeld) הראה ב-1916 שעבור כל מסלול צריכים להיות מסלולים נוספים בעלי אותה אנרגיה, כאשר המסלולים השונים נבדלים זה מזה במידת האליפטיות שלהם.

מסלולים אלה זוכים לתיקונים יחסותיים קטנים, כך שהאנרגיות שלהם קצת שונות מזו של המסלול המעגלי.

לכן הם גורמים להפרדה של הקווים הספקטרליים הראשיים לתתי-קווים מופרדים במקצת.



ביחס להבדל אורך הגל בין הקווים הספקטרלים הראשיים, ההפרדה בין הקווים המשניים מאופיינת

$$\alpha \equiv \frac{k_E e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137} \text{ ע"י הגודל}$$

שנקרא "קבוע המבנה העדין" (Fine-structure constant). קבוע זה מסמל את חוזק האינטראקציה האלקטרומגנטית.

למעשה, המבנה העדין נובע מתכונה קוונטית לחלוטין של האלקטרונים שנקראת ספין. מעניין שהתורה של זומרפלד נותנת את התוצאה הנכונה, אבל ההסבר המיקרוסקופי של התופעה בתורה של זומרפלד אינו נכון.

### **מתי מודל בוהר עובד היטב (בתחום האופטי)**

המודל נבנה עבור אטום המימן ואטומים דומים – בעלי אלקטרון אחד (למשל,  $\text{Li}^{++}$ ,  $\text{He}^+$ ), שעבורם גם נוסחת רידברג עובדת היטב. צריך רק לקחת את ה-Z הנכון.

באטומים מרובי-אלקטרונים, הכוח בין האלקטרונים מסבך את הבעיה ומשנה את הספקטרום.

אטומים נוספים בהם המודל עובד טוב למדי הם אלה של היסודות האלקליים – בעמודה השמאלית של המערכה המחזורית.

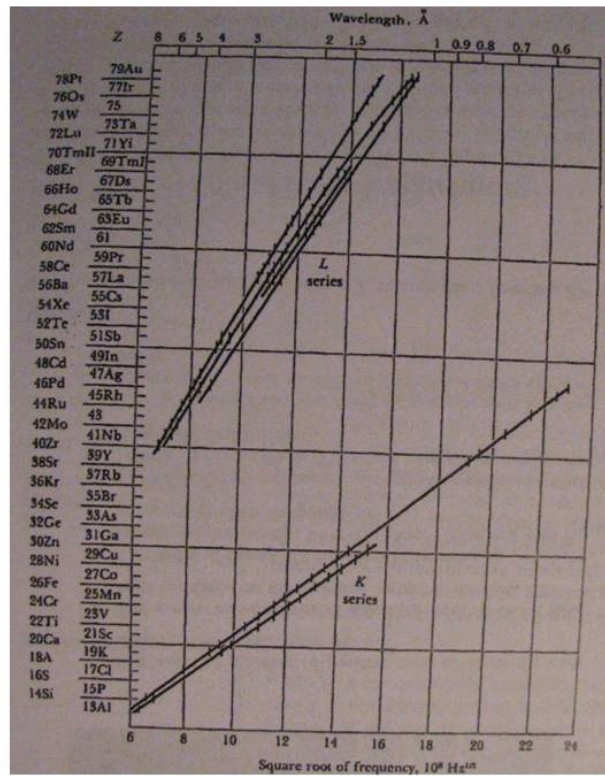
כיום ידוע כי באטומים אלה קיים אלקטרון אחד במסלול מרוחק יותר מהשאר, כך שהוא "רואה" ברדיוסים קטנים יותר את הגרעין בעל מטען  $Ze$  מסוכך ע"י  $Z - 1$  אלקטרונים בעלי מטען  $-(Z-1)e$ .

### **ספקטרום קרני X**

מסתבר שמודל בוהר גם עובד היטב עבור קרני X, שמהן ניתן ללמוד עוד על מבנה האטום. באותה שנה בה פרסם בוהר את המודל שלו (1913), מצא מוזלי (Moseley) שאורכי הגל של קרינת X תלויים ב-Z של האטום בצורה מסודרת. הוא הציע שאורכי גל אלה נובעים ממעברים למסלולים הפנימיים ביותר של האטום. כך שאם נניח ששאר האלקטרונים נמצאים במסלולים חיצוניים יותר, אז לאלקטרונים אלה יש השפעה ממוצעת קטנה בלבד על אלקטרון במסלול הפנימי.

לפי מודל בוהר, תדירות האור עבור מעבר בין רמות מסוימות פרופורציונית ל- $Z^2$ .  
 אז מוזלי צייר את שורש התדירות כפונקציה של  $Z$  וקיבל את התוצאות הבאות:

הנה התוצאות של מוזלי,  $Z$  לעומת שורש התדירות:



מוזלי מצא שאפשר להתאים את התוצאות לנוסחה  $\sqrt{f} = A_n(Z - b)$  אז התוצאות מתחלקות לסדרות, כאשר לכל סדרה ערך מסוים של  $A_n$ , ולכל קבוצת סדרות אותו ערך של  $b$ .

למשל, בסדרה ששמה סדרת K מתקיים  $b=1$ , ו- $A_n$  מקבל ערכים שונים.  
 תת-הסדרה עם  $b=1$ ,  $n=1$  נקראת  $K_\alpha$ , תת-הסדרה עם  $n=2$  נקראת  $K_\beta$ , וכו'.  
 בסדרה ששמה סדרת L מתקיים  $b=7.4$ .

ננסה לראות את הקשר למודל בוהר ומה לומדים מהתוצאות של מוזלי, ע"י התבוננות בסדרת K, כלומר,  $b=1$ :

בניח שסדרה זו נובעת מכך שאלקטרון אנרגטי (שמואץ ע"י המתח בשפופרת) מוציא אלקטרון מהמסלול הפנימי ביותר של האטום.

כלומר, בנוסחת בוהר לתדירות האור שנפלטת כאשר אלקטרון שנמצא ברמה  $n$  עובר לרמה

$$n_f=1, f = cRZ^2 \left( \frac{1}{n_f} - \frac{1}{n^2} \right), \text{ יש להציב } n_f=1.$$

בשל התלות שמוזלי מצא, נחליף את  $Z$  ב- $Z-1$ .

$$f = cR(Z-1)^2 \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right), \text{ כלומר,}$$

$$A_n^2 = cR \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \text{ אז ע"י השוואה לנוסחה של מוזלי מקבלים}$$

דרך פשוטה להסביר את העובדה שמקבלים תלות ב- $Z-1$  ולא ב- $Z$  ניתן להסביר ע"י זה שמלכתחילה היו שני אלקטרונים ברמה הראשונה, ורק אחד מהם הוצא ממנה. אז מטען הגרעין האפקטיבי שראה אלקטרון שעבר מרמה  $n$  לרמה הראשונה היה  $e(Z-1)$ .

בהנחה שסדרת  $L$  נובעת מאלקטרונים שהוצאו מרמת  $n_f=2$ , התדירויות בסדרה זו הן

$$f = cR(Z-7.4)^2 \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

כאן זה נראה כאילו מטען הגרעין האפקטיבי הוא 7.4, שזה גודל לא שלם, בשעה שידוע כי מטען תמיד בא ביחידות של  $e$ .

אז באופן נאיבי, אפשר להניח שברמה  $n_f=2$  ישנם 6 אלקטרונים.

כאשר מוציאים אחד מהם, מטען הגרעין האפקטיבי שרואה האלקטרון שעובר לרמה זו מרמה יותר גבוהה (הגרעין האמיתי + 7 האלקטרונים הנותרים ברמות 1 ו-2) קטן מ- $Z$  ב-7. הערך 7.4 נובע, מן הסתם, מכך שאי אפשר להזניח לגמרי את האינטראקציות עם האלקטרונים ברמה 3.

**למעשה, חשוב זה אינו מדויק, למרות שהרעיון נכון באופן איכותני.**

כיום ידוע כי ברמה  $n$  ישנם  $2n^2$  אלקטרונים.

### חשיבות המדידות של מוזלי: מטען הגרעין ומספרים קוונטים

אנו השתמשנו ב- $Z$  בתור מטען הגרעין.  
 אבל עד המדידות של מוזלי, המספר האטומי  $Z$  היה בסך הכל מספר סידורי בטבלת מנדלייב,  
 שאורגנה לפי התכונות הכימיות של היסוד ומסתו המולרית  $A$ .  
 היה ידוע כי  $Z \sim A/2$ .  
 מוזלי היה הראשון שהראה של- $Z$  יש משמעות בתור מטען הגרעין.  
 באמצעות מדידות בקרני  $X$  הוא מצא את  $Z$  עבור היסודות שהיו ידועים בין  $Z=13$  ל- $Z=79$ ,  
 וטען שבתחום זה ישנם שלושה יסודות שעדיין לא גילו אותם אז.

בנוסף, מוזלי מצא שברמות השונות יש מספרים מסוימים של אלקטרונים (אם כי, בשל  
 אינטראקציה בין האלקטרונים, אי אפשר לקבל את מספר האלקטרונים בכל רמה באופן מדויק  
 מתוצאותיו של מוזלי, כפי שצינו למעלה).  
 מודל בוהר אינו מסביר תופעה זאת. לשם כך יש צורך בתורת הקוונטים המלאה, שמראה כי ברמה  
 $n$  ישנם  $2n^2$  אלקטרונים.

הסיבה לכך טמונה בעקרון קוונטי שנקרא The Exclusion principle ונוסח ע"י פאולי  
 (Wolfgang Pauli). עקרון זה מלמד ששני אלקטרונים אינם יכולים להיות בדיוק באותו מצב  
 קוונטי. (את הסיבה לעקרון זה לומדים בתורת השדות הקוונטית).  
 מצב קוונטי מתואר ע"י אוסף של מספרים קוונטים.  
 למשל, מספר הרמה  $n$  במודל בוהר הוא מספר קוונטי. האמתאר מצב דיסקרטי (משום ש- $n$   
 מספר טבעי) בו יכול האלקטרון להיות.

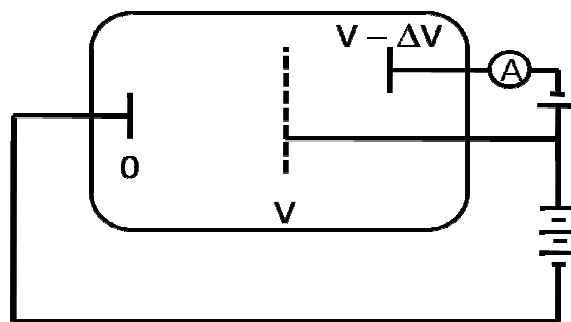
אילו  $n$  היה המספר הקוונטי היחיד המתאר את מצב האלקטרון באטום, אז בכל רמה היה יכול  
 להיות רק אלקטרון אחד.  
 אבל מפתרון מלא של אטום המימן בתורת הקוונטים לומדים שקיימים מספרים קוונטים נוספים,  
 כך שמצב קוונטי מוגדר ע"י כמה מספרים, ולכן יכול להיות יותר מאלקטרון אחד עבור כל  $n$ ,  
 אבל מספר האלקטרונים בכל זאת מוגבל בשל העקרון של פאולי.

המדידות של מוזלי היו הנתונים הראשונים שעליהם התבססה הבנה זו, שאי אפשר היה לקבלה  
 ממודל בוהר.

## ניסוי פראנק-הרץ

ב-1914 ביצעו James Franck and Gustav Hertz (האחיין של היינריך הרץ, מגלה הגלים האלקטרומגנטיים) ניסוי שחזק את

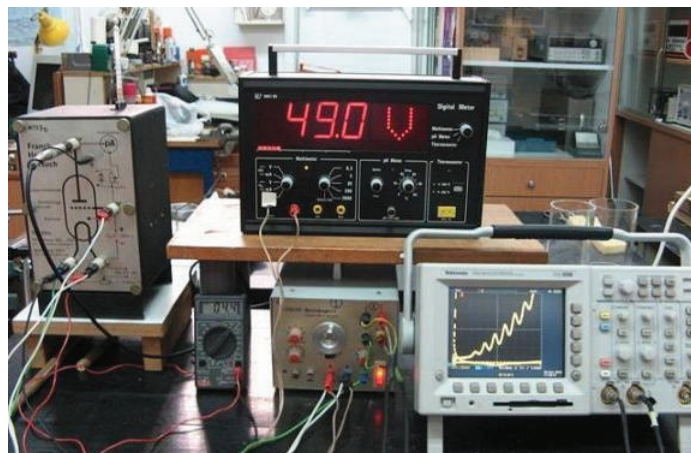
- התמונה של בוהר – לאלקטרון באטום רמות אנרגיה דיסקרטיות
- התמונה של מוזלי –שני אלקטרונים אינם יכולים להיות באותה רמה



בשופרת שבה אדי כספית, מוחזקות שתי אלקטרודות עם הפרש פוטנציאלים  $V$  ביניהן, כך שאלקטרונים מואצים מהקתודה לעבר האנודה, שבה חורים שמאפשרים את מעבר האלקטרונים.

מאחורי האנודה נמצאת אלקטרונה נוספת, מעט שלילית ביחס לאנודה ( $\Delta V \ll V$ ).

## הדגמה: ניסוי פראנק-הרץ.



מודדים את הזרם דרך האלקטרודה השלישית כפונקציה של  $V$ . מוצאים שהזרם עולה עם עליית  $V$ , אבל כאשר  $V$  מגיע לערך מסוים  $V_1$ , הזרם קטן.

ניתן להסביר תוצאות אלה במסגרת האיכותנית של מודל בוהר:  
כאשר  $V$  קטן (אך גדול מ- $\Delta V$ ), האלקטרונים מואצים מהקתודה לעבר האנודה.  
אלה שעוברים דרך החורים באנודה מואטים קצת בדרכם אל האלקטרודה השלישית.  
אבל בסופו של דבר מגיעים אלקטרונים לאלקטרודה השלישית ונמדד זרם.

כאשר מגדילת את  $V$ , מתישהו מגיעים למתח  $V_1$ , שבו האנרגיה הקינטית של האלקטרונים  
כשהם מגיעים קרוב לאנודה מספיקה כדי להוציא אלקטרון מהרמה העליונה ביותר של אטום  
הכספית.

(אומרים שהאלקטרונים המואצים מעוררים את אטום הכספית, כלומר, גורמים למעבר אלקטרונים מרמה נמוכה  
לרמה גבוהה יותר).

אז חלק מהאלקטרונים יעשו זאת, וע"י כך יאבדו את כל האנרגיה הקינטית שלהם לאטומים, ולא  
תהיה להם מספיק אנרגיה קינטית כדי להתגבר על המתח  $\Delta V$  ולהגיע לאלקטרודה השלישית.  
אותם אלקטרונים לא יתרמו לזרם, ולכן הזרם קטן.

פראנק והרץ קיבלו פרס נובל על עבודה זו.

### הערות פרקטיות לגבי ניסוי פראנק-הרץ:

את ניסוי פראנק-הרץ מבצעים עם גז כספית ולא עם מימן, משום שמימן הוא גז דו-אטומי. לכן,  
התנגשויות האלקטרונים עם מולקולות המימן לא גורמות לעירורים של אטומי המימן, אלא  
לעירורים מולקולריים מסובכים יותר ש"מקלקלים" את האפקט. בנוסף, ניתן לשלוט על צפיפות גז  
הכספית בצורה נוחה ע"י שינוי הטמפרטורה שלו.

בכל זאת, לשם פשטות, נתבונן במצופה מניסוי פראנק-הרץ עבור המקרה הפשוט של גז מימן חד-  
אטומי:

מאחר שבטמפרטורה נמוכה כמעט כל אטומי המימן נמצאים כרגיל במצב היסוד  $n=1$  (ואם לא, הם  
פולטים פוטונים ויורדים למצב היסוד), כדי שהאנרגיה של האלקטרון המואץ בניסוי תעבור  
לאטום, על האלקטרון המואץ לעורר את האטום ממצב היסוד למצב כלשהו בעל מספר קוונטי  $m$ .  
האנרגיה הדרושה לכך היא  $E_0 \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{m^2} \right)$ , כלומר, מתח ההאצה שבו מתרחשת נפילת מתח הוא

נשים לב שהיחס בין מתח הנפילה הראשונה למתח הנפילה השנייה הוא  $V_{1 \rightarrow m} = \frac{E_0}{e} \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{m^2} \right)$ .

$$\text{והיחס בין מתחי הנפילה הראשונה וה"אחרונה" הוא } \frac{V_{1 \rightarrow 3}}{V_{1 \rightarrow 2}} = \frac{\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2}}{\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}} = \frac{\left(\frac{8}{9}\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)} = 1.2$$

כך שכל הנפילות האלה קורות במתחים קרובים, ויהיה קשה להבדיל ביניהן –  $\frac{V_{1 \rightarrow \infty}}{V_{1 \rightarrow 2}} = \frac{4}{3} = 1.5$

כולן משתלבות ל"שקע" רחב אחד בפונקציה הזרם לעומת המתח.

אבל כאשר נגיע למתח של  $2V_{1 \rightarrow 2}$ , לאלקטרונים המואצים תהיה מספיק אנרגיה לעורר שני אטומים, ולכן גם במתח זה נראה נפילה בזרם, וכן גם במתח  $3V_{1 \rightarrow 2}$ ,  $4V_{1 \rightarrow 2}$ , וכו'. את ההבדלים הגדולים בין נפילות הזרם האלה קל יותר לראות, ולכן רואים שקעים בזרם כל הפרש מתח של  $V_{1 \rightarrow 2}$ .

שימו לב ש"עומק" השקע וצורתו תלויים בחתך הפעולה להתנגשות בין האלקטרון המואץ לאטום הכספית, כך שהאלקטרון מעורר את האטום (מעלה אלקטרון לרמה גבוהה יותר). חתך הפעולה תלוי בין השאר באנרגיה של האלקטרון המואץ. כמו כן, צורת השקע מושפעת גם מהתרחבות דופלר של ה"קוים" הספקטראליים של הכספית, שנובעת מהתנועה התרמית של אטומי הכספית.

## תנאי הקוונטיזציה של וילסון וזומרפלד

עד עכשיו יש בידינו מספר מקרים של קוונטיזציה אד-הוק: אנרגיה של קרינה, מצבי אנרגיה של אלקטרונים, תנע זייתי של אלקטרונים.

וילסון וזומרפלד ניסו למצוא חוקיות כללית יותר. הם הציעו את כלל הקוונטיזציה הבא:

נתבונן במערכת בעלת קואורדינטה  $q$  מחזורית או סופית.

למשל,  $q$  היא זיית בתחום  $0 < q < 2\pi$ .

אז תנאי הקוונטיזציה הוא

$$\oint pdq = nh$$

כאשר  $p$  ה"תנע" הצמוד ל- $q$ , והאינטגרל הוא על-פני מחזור שלם.

למשל:

- אלקטרון באטום המימן:

$q$  הוא זווית הסיבוב סביב הגרעין.

$p$  הוא התנע הזוויתי בשל המהירות הזוויתית.

תנאי הקוונטיזציה הוא

$$\int_0^{2\pi} L d\phi = nh$$

$$2\pi L = nh$$

$$L = n\hbar$$

כאשר השתמשנו בכך שהתנע הזוויתי בלתי תלוי בזווית כדי לבצע את האינטגרל.

אז שימו לב שקיבלנו את תנאי הקוונטיזציה של בוהר.

- אוסצילטור הרמוני, שמתואר ע"י המשוואה  $-kq = m\ddot{q}$ .

הפתרון הוא  $q = A \sin \omega t$ , כאשר  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

הדיפרנציאל של  $q$  הוא  $dq = \omega A \cos \omega t dt$

והתנע הוא  $p = m \frac{dq}{dt} = m\omega A \cos \omega t$

אז תנאי הקוונטיזציה הוא

$$\oint p dq = \oint m\omega^2 A^2 \cos^2 \omega t dt = nh$$

נשתמש בכך שהאנרגיה נתונה ע"י האנרגיה הפוטנציאלית המקסימלית,

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

$$2E \int \cos^2 \omega t dt = 2E \int \cos^2 \theta \frac{d\theta}{\omega} = 2 \frac{E}{\omega} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = 2 \frac{E}{\omega} \pi$$

כאשר בשוויון הראשון החלפנו משתנים (כמו באינטגרל של פיזור רתרפורד)  $dt = d\theta/\omega$

תנאי הקוונטיזציה אומר שזה שווה ל-  $nh$ . אז האנרגיה היא

$$E = n\hbar\omega = nh\nu$$

שזה התנאי בו השתמש פלאנק לקרינת גוף שחור ואיינשטיין לאפקט הפוטואלקטרי.

- חלקיק בקופסה חד-מימדית באורך  $2L$ .

תנאי הקוונטיזציה:



$$\oint p dq = \int_0^{2L} p dq = 2Lp = nh$$

$$p = \frac{nh}{2L}$$

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}$$

כאשר לקחנו את האינטגרל מ-0 עד 2L בהנחה שזה מתאים לאינטגרל מחזורי.  
 אז מהתוצאה אפשר לחזות שגם האנרגיה של חלקיק בקופסה מקוונטטת.

### טרומ מכניקה קוונטית

עד עכשיו למדנו על מספר מקרים של קוונטיזציה:

- קוונטיזציה של האנרגיה של קרינה
- קוונטיזציה של מצבי האנרגיה של האטום
- קוונטיזציה של תנע זייתי באטום

אלה תופעות שגילינו והצלחנו פחות-או-יותר לגזור מהן מסקנות עמוקות, אבל לא באמצעות תיאוריה מסודרת שמבוססת על עקרונות מוצקים.

מודל בוהר ותנאי וילסון-זומרפלד הם שיטות מועילות, אך אינם תיאוריה קוונטית באמת.

הם תערובת של שיקולים קלאסיים וקוונטיים,

ואינם נותנים כללים ברורים לגבי מה יש לשמור מפיזיקה קלאסית במעבר למערכת

מאקרוסקופית.

למשל, במודל בוהר, שומרים את חוק קולון, אבל לא שומרים את זה שמטען מאיץ פולט קרינה,

ולא ברור מדוע.

כמו כן, תנאי וילסון-זומרפלד עובד רק למערכות מחזוריות. לא ברור מה קורה עם מערכות

אחרות.

אז יש צורך בתיאוריה טובה יותר – התיאוריה של מכניקה קוונטית.

עם זאת, אין לזלזל במודל בוהר ובפיזיקה הטרומ קוונטית – הלא היו הכלים התיאורטיים שהובילו להבנות שהביאו לבנייה של המכניקה הקוונטית.