

# פתרון תרגיל בית 2 - טופולוגיה

## שאלה 1

תזכורת: הגדרנו בכיתה את המטריקה ה- $p$ -adic באופן הבא: עבור  $p \in \mathbb{N}$   
ראשוני מגדירים מטריקה על  $\mathbb{Z}$

$$k(x, y) = \max \{i : p^i \mid (x - y)\} \text{ עבור } , d_p(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{1}{p^{k(x, y)}} & x \neq y \end{cases}$$

א. הוכיחו ש  $p^n \xrightarrow{d_p} 0$ .

ב. תארו את הכדור  $B_{d_7}\left(3, \frac{1}{49}\right)$  במרחב  $(\mathbb{Z}, d_7)$ .

ג. עבור  $t \in \mathbb{Z}$  מצאו דוגמה לסדרה לא קבועה במרחב  $(\mathbb{Z}, d_3)$  המתכנסת ל- $t$ .

ד. הוכיחו/הפריכו: הפונקציה  $f(x) = x^5$  רציפה ב- $(\mathbb{Z}, d_5)$ .

## פתרון

א.  $k(p^n, 0) = \max \{i : p^i \mid (p^n - 0)\} = n \Rightarrow d_p(p^n, 0) = \frac{1}{p^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow p^n \xrightarrow{d_p} 0$

ב.  $k(x, 3) \geq 3$  ולכן  $\frac{1}{7^{k(x, 3)}} < \frac{1}{7^2}$  ולכן  $B_{d_7}\left(3, \frac{1}{49}\right) = \left\{x \in \mathbb{Z} : d_7(x, 3) < \frac{1}{7^2}\right\}$

ומכאן  $7^3 \mid (x - 3)$  ולכן הכדור הוא  $3 + 7^3\mathbb{Z}$ .

ג. למשל:  $x_n = 3^n + t$  שכן מתקיים  $d_3(x_n, t) = \frac{1}{3^n} \rightarrow 0$

ד. נוכיח רציפות בנקודה  $a \in \mathbb{Z}$ . יש להראות שלכל  $\varepsilon > 0$  קיים  $\delta > 0$  כך שאם

$x \in B(a, \delta)$  אזי  $f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$ . נשים לב שמכיוון ש-

$x^5 - a^5 = (x - a)(x^4 + x^3a + x^2a^2 + xa^3 + a^4)$  מתקיים  $k(x^5, a^5) \geq k(x, a)$  ולכן

$d_5(x^5, a^5) \leq d(x, a) < \delta$  עבור  $x = a$  אי השוויון האחרון גם כן מתקיים. נוכל

לבחור  $\varepsilon = \delta$  ולסיים את ההוכחה.

## שאלה 2

יהיו  $x_1, x_2 \in (X, d)$  ו-  $r_1, r_2 > 0$  ויהיו  $B(x_1, r_1), B(x_2, r_2)$  כדורים פתוחים

שחיתוכם אינו ריק. תהי  $p \in B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$  - ו

$$r = \min\{r_1 - d(p, x_1), r_2 - d(p, x_2)\}$$

הוכיחו ש-  $B(p, r) \subseteq B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$ .

## פתרון

טענת עזר:

תהי  $p \in B(x, R)$  ונניח שמתקיים  $0 < r \leq R - d(x, p)$ , אזי  $B(p, r) \subseteq B(x, R)$ .

הוכחת טענת עזר:

יהי  $z \in B(p, r)$  אזי  $d(p, z) < r$ .  $d(p, z) < r \leq R - d(p, x) + d(p, x) \leq R - d(p, x) + d(z, x) \leq R$  ולכן

$$z \in B(x, R)$$

הערה: אכן מתקיים  $0 < R - d(x, p)$  שכן  $p \in B(x, R)$ .

מש"ל טענת עזר.

כעת, יהי  $r = \min\{r_2 - d(p, x_2), r_1 - d(p, x_1)\}$ . מהעובדה ש-  $p \in B(x_1, r_1)$  ומטענת

העזר נובע ש-  $B(p, r) \subseteq B(x_1, r_1)$  (הציבו  $x = x_1, R = r_1$ ). באופן דומה נקבל

$$B(p, r) \subseteq B(x_2, r_2)$$

## שאלה 3

הגדרה: תהי  $\{x_n\}$  סדרה במרחב מטרי כלשהו  $(X, d)$ . נאמר שהסדרה היא

"קבועה לבסוף" אם קיים  $x \in X$  כך שקיים  $n_0 \in \mathbb{N}$  עבורו לכל  $n \geq n_0$  מתקיים

$$x_n = x$$

**א.** הוכיחו כי בכל מרחב מטרי, כל סדרה קבועה לבסוף מתכנסת.

**ב.** הוכיחו כי סדרה מתכנסת במרחב מטרי **דיסקרטי** אם ורק אם היא

קבועה לבסוף.

- ג.** אפיינו את סדרות הקושי במרחב הדיסקרטי (כלומר, נסחו תנאי מספיק והכרחי להיות סדרה כלשהי סדרת קושי, והוכיחו תנאי זה!).
- ד.** הסיקו שכל מרחב דיסקרטי הוא שלם.

### פתרון

- א.** נניח ש  $\{x_n\}$  קבועה לבסוף אזי קיימים  $n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $x \in X$  כך שלכל  $n \geq n_0$  מתקיים  $x_n = x$ . נראה שהסדרה  $\{x_n\}$  מתכנסת ל  $x$ . יהי  $\varepsilon > 0$  אזי לכל  $n \geq n_0$  מתקיים  $d(x_n, x) = d(x, x) = 0 < \varepsilon$ .
- ב.** מספיק להוכיח (עפ"י סעיף א') שכל סדרה מתכנסת במ"מ דיסקרטי היא קבועה לבסוף.

- נניח  $x \rightarrow \{x_n\}$  במ"מ דיסקרטי, אזי קיים  $n_0 \in \mathbb{N}$  כך שלכל  $n > n_0$  מתקיים  $d(x_n, x) < 1$ ; אך זה אומר בהכרח שלכל  $n \geq n_0$   $d(x_n, x) = 0$  (המרחקים האפשריים הם רק 0 או 1). מכאן  $x_n = x$  לכל  $n \geq n_0$ .

- ג.** סדרה במרחב דיסקרטי היא קושי אמ"מ היא קבועה לבסוף.
- כיוון ראשון: אם הסדרה קבועה לבסוף היא מתכנסת (לפי סעיף א') וסדרה מתכנסת היא קושי.

- בכיוון שני: נניח שהסדרה היא סדרת קושי ונוכיח שהיא קבועה לבסוף. מהגדרת קושי עבור  $\varepsilon = 1$  קיים  $n_0 \in \mathbb{N}$  כך שלכל  $m, n \geq n_0$  מתקיים  $d(x_m, x_n) < 1$ . מהגדרת המטריקה הדיסקרטית נובע ש-  $x_m = x_n$  לכל  $m, n \geq n_0$ , ובפרט  $x_n = x_{n_0}$  לכל  $n \geq n_0$  ולכן הסדרה קבועה לבסוף.

- ד.** תהי  $\{x_n\}$  סדרת קושי. לפי סעיף ג' היא קבועה לבסוף ולפי סעיף א' היא מתכנסת.

#### שאלה 4

במרחב  $\ell_\infty$  הראו שהסדרה  $x_n = \left( \frac{n+1}{n}, \frac{n+2}{2n}, \frac{n+3}{3n}, \dots \right)$  מתכנסת, ומצאו את גבולה.

#### פתרון

הגבול הוא  $x = \left( 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right)$ . הוכחה: מתקיים  $d(x_n, x) = \frac{1}{n} \rightarrow 0$  (מדוע?).

#### שאלה 5

**א.** הוכיחו את הטענה הכללית הבאה: יהי  $(X, \sigma)$  מרחב מטרי, ויהי  $(Y, \sigma_Y)$  תת מרחב מטרי שלו. תהי  $\{x_n\} \subseteq Y$  ו-  $y \in Y$ . אזי  $x_n \xrightarrow{\sigma_Y} y$  אם"מ  $x_n \xrightarrow{\sigma} y$ .

נתבונן במרחב  $\langle \mathbb{I}, d \rangle$  כאשר  $\mathbb{I}$  הוא קבוצת המספרים האי-רציונאליים, ו-  $d$  היא המטריקה הסטנדרטית המושרית מ-  $\mathbb{R}$ . נגדיר את הסדרה הבאה:

$$x_n = \frac{n + \sqrt{2}}{n - \sqrt{2}}$$

**ב.** הוכיחו שהסדרה  $\{x_n\} \subseteq \mathbb{I}$ .

**ג.** הוכיחו שהסדרה אינה מתכנסת בתת המרחב המטרי  $\langle \mathbb{I}, d \rangle$ .

#### פתרון

**א.** שימו לב שלכל  $n \in \mathbb{N}$  מתקיים  $\sigma(x_n, y) = \sigma_Y(x_n, y)$  ולכן  $x_n \xrightarrow{\sigma_Y} y$  אם"מ  $\sigma_Y(x_n, y) \rightarrow 0$  אם"מ  $x_n \xrightarrow{\sigma} y$ .

**ב.** נניח בשלילה שקיים  $n \in \mathbb{N}$  כך ש- $x_n$  רציונאלי. אזי קיימים  $p, q$  שלמים

$$\text{כך ש-} \frac{n + \sqrt{2}}{n - \sqrt{2}} = \frac{p}{q} \text{ . לאחר כפל בהצלבה מקבלים}$$

$$qn + q\sqrt{2} = pn - p\sqrt{2} \text{ ולכן } \sqrt{2} = \frac{pn - qn}{q + p} \text{ , בסתירה לכך ש-} \sqrt{2} \text{ הוא}$$

אי-רציונאלי.

**ג.** נניח בשלילה שהסדרה מתכנסת בתת המרחב, כלומר  $x_n \rightarrow a \in \mathbb{I}$ . לכן

(לפי סעיף א') היא מתכנסת ב- $\mathbb{R}$ . קל לראות ש- $x_n \rightarrow 1$ . מיחידות

הגבול במרחב מטרי נקבל  $a = 1$  וזו סתירה.

## שאלת אתגר

הראו שאם  $(X, \|\cdot\|)$  מרחב נורמי ו- $d$  המטריקה המושרה מהנורמה אזי **לא**

קיימים כדורים **שונים**  $B(a_1, r_1), B(a_2, r_2)$  כאשר  $r_1 < r_2$  ו- $B(a_1, r_1) \supset B(a_2, r_2)$ .

## פתרון

נניח  $a_2 \neq a_1$  וכן  $r_1 < r_2$  ונניח בשלילה ש- $B(a_2, r_2) \subseteq B(a_1, r_1)$  אזי

$$a_2 \in B(a_2, r_2) \subseteq B(a_1, r_1) \text{ ולכן } \|a_2 - a_1\| < r_1 \text{ יהי } v = a_1 + r_1 \cdot \frac{a_2 - a_1}{\|a_2 - a_1\|} \text{ (שימו לב}$$

אם היינו ב- $\mathbb{R}^2$  המשמעות הגיאומטרית היתה חיבור של הוקטור  $a_1$  לוקטור עם

נורמה  $r_1$  בכיוון של  $(a_2 - a_1)$  מתקיים:

$$\begin{aligned} \|v - a_2\| &= \left\| a_1 + r_1 \cdot \frac{a_2 - a_1}{\|a_2 - a_1\|} - a_2 \right\| = \left\| (a_2 - a_1) \cdot \left( \frac{r_1}{\|a_2 - a_1\|} - 1 \right) \right\| \\ &= \left\| (a_2 - a_1) \frac{r_1 - \|a_2 - a_1\|}{\|a_2 - a_1\|} \right\| = \\ &= \frac{\|a_2 - a_1\|}{\|a_2 - a_1\|} |r_1 - \|a_2 - a_1\|| = r_1 - \|a_2 - a_1\| < r_1 < r_2 \end{aligned}$$

לכן  $v \in B(a_2, r_2)$  אבל  $v \notin B(a_1, r_1)$  שכן:  $\|v - a_1\| = r_1$ .

שם הקורס: טופולוגיה  
שם המרצה: דר' נוביק  
מתרגלים: לואי פולב ומני שלוסברג

הערה:  $a_2 \neq a_1$  ולכן בהכרח  $\|a_2 - a_1\| \neq 0$  ומכאן שהביטוי  $\frac{a_2 - a_1}{\|a_2 - a_1\|}$  מוגדר.

קיבלנו סתירה להנחה.