אביב תשע"ה

פיסיקה למתמטיקאים

קפיץ במישור

1. 2 מסות m_1, m_2 מחוברות באצעות קפיץ בעל קבוע k.

(א) רשמו את הלגראנג'יאן

נתאר את התנועה במערכת מרכז המסה, כאשר r המרחק בין המסות ו θ הזווית ביחס לאופק. נקבל

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}kr^2, \tag{1}$$

כאשר $\mu = m_1 m_2/(m_1+m_2)$ המסה המצומצמת.

(ב) רשמו את משוואות התנועה

משוואות התנועה עבור r ו θ בהתאמה הן

$$\mu\ddot{r} = \mu r\dot{\theta}^2 - kr, \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\mu r^2\dot{\theta}\right) = 0. \tag{3}$$

משוואה (3) מתארת את שימור התנע הזויתי $L = \mu r^2\dot{\theta}$. מהצבה ב (2) נקבל

$$\mu\ddot{r} = \frac{L^2}{\mu r^3} - kr = -V'_{eff} \tag{4}$$

כאשר $V_{eff} = L^2/2\mu r^2 + kr^2/2$ הפוטנציאל האפקטיבי.

(ג) מצאו את תדירות התנודות הקטנות אם מסיטים את המערכת בשיעור $|\delta| \ll r_0$ מנקודת שווי המשקל r_0

נקודת שווי המשקל מקיימת $V'_{eff} = 0$ או $r_0 = (L^2/\mu k)^{1/4}$. אם מזיזים את המערכת בשיעור δ מנקודה זו מקבלים (בהצבת $r = r_0+\delta$ ב (2) והזנחת איברים $(\mathcal{O}(\delta/r_0)^2$)

$$\mu\ddot{\delta} = \frac{L^2}{\mu r_0^3}\left(1 - 3\frac{\delta}{r_0}\right) - k(r_0+\delta), \tag{5}$$

ומהצבת r_0 ב (5) נקבל

$$\ddot{\delta} + \omega^2\delta = 0, \tag{6}$$

כאשר $\omega = 2\sqrt{k/\mu}$.