שיעור וירטואלי

אחד מהנושאים הראשונים שנפגוש בקורס הוא פתרון של מערכת משוואות לינארית. דוגמה למערכת משוואות לינאריות היא המערכת

$$\begin{cases} 4x+2y &= 4 \\ x-3y &= 0 \end{cases}$$

שיש בה שתי משוואות (לינאריות) ושני נעלמים. מערכות כאלה נפוצות בתיכון אבל אפשר גם לעבוד עם מערכות עם יותר משוואות ו/או נעלמים. למשל

$$\begin{cases} x+2y+z &= 4 \\ 5x+2y-z &= 0 \end{cases}$$

היא מערכת עם שתי משוואות ו 3 נעלמים והמערכת

$$\begin{cases} x+2y+z &= 4 \\ 5x+2y-z &= 0 \\ 2x+0y+2z &= 1 \\ 0x-3y+2z &= -1 \end{cases}$$

היא מערכת עם 4 משוואות ו 3 נעלמים (אין שום סיבה שמספר המשוואות ומספר הנעלמים יהיה שווה...).

פעולות אלמנטריות

בשביל לפתור מערכות משוואות בצורה פשוטה ומסודרת אנחנו נבצע עליהם פעולות שנקראות פעולות שורה אלמנטריות (או בקיצור פעולות אלמנטריות). הפעולות האלמנטריות מחולקות ל 3 סוגים. הסוג הראשון הוא ביצוע של החלפת שתי שורות/משוואות אחת עם השניה. למשל, על המערכת

$$\begin{cases} x+2y+z &= 4 \\ 5x+2y-z &= 0 \\ 2x+0y+2z &= 1 \end{cases}$$

נוכל לבצע את הפעולה של "החלפת השורה הראשונה והשניה" ונקבל את המערכת

$$\begin{cases} 5x+2y-z &= 0 \\ x+2y+z &= 4 \\ 2x+0y+2z &= 1 \end{cases}$$

שקל לראות שלא קלקלנו שום דבר חשוב.. את הפעולה של החלפת השורה הראשונה והשניה מסמנים ב $R_1 \leftrightarrow R_2$ (האות R היא קיצור של Row = שורה) וביצוע הפעולה על מערכת רושמים

$$\begin{cases} x+2y+z &= 4 \\ 5x+2y-z &= 0 \\ 2x+0y+2z &= 1 \end{cases} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{cases} 5x+2y-z &= 0 \\ x+2y+z &= 4 \\ 2x+0y+2z &= 1 \end{cases}$$

(לא לדאוג, אנחנו עוד נבין למה פעולה זאת חשובה). באותו אופן אפשר לבצע את הפעולה $R_1 \leftrightarrow R_3$ שמחליפה את השורה הראשונה והשלישית ובאופן כללי הסוג הראשון של פעולות שניתן לבצע על מערכת משוואות היא החלפת שורה מספר i עם שורה מספר j שמסומנת ב $R_i \leftrightarrow R_j$.

הסוג השני של פעולות שניתן לבצע היא הכפלת שורה מסוימת במספר מסוים ששונה מאפס. למשל, על המערכת

$$\begin{cases} x+2y &= 1 \\ 5x+10y &= 15 \end{cases}$$

נוכל לבצע את הפעולה של "הכפלת השורה השניה ב $\frac{1}{5}$" ונקבל את המערכת

$$\begin{cases} x+2y &= 1 \\ x+y &= 3 \end{cases}$$

שגם פה, קל לראות שלא קלקלנו שום דבר חשוב. פה זה נקודה טובה להדגים מה זה כן לקלקל: אם היינו מתחילים עם המערכת

$$\begin{cases} x+2y &= 1 \\ 5x+10y &= 15 \end{cases}$$

ומכפילים את השורה השניה ב 0 היינו מקבלים את המערכת

$$\begin{cases} x+2y &= 1 \\ 0x+0y &= 0 \end{cases}$$

שאחד מהפתרונות שלה הוא $x=2, y=-\frac{1}{2}$ (הציבו ובדקו שאכן השיוויונות מתקיימים). לעומת זאת במערכת שהתחלנו איתה $x=2, y=-\frac{1}{2}$ הוא אינו פתרון. מכאן שהפעולה של הכפלת השורה השניה באפס הוסיפה לנו פתרון שלא היה. זה נקרה לקלקל.. פעולה שלא מקלקלת היא פעולה ששומרת על הפתרונות של המערכת. כלומר שכל פתרון שיש למערכת שמתחילים איתה יהיה גם פתרון למערכת אחרי ביצוע הפעולה וגם להיפך (כל פתרון של המערכת המתקבלת מביצוע הפעולה הוא פתרון למערכת שמתחילים איתה). נחזור לפעולות אלמנטריות מסוג שני - פעולה אלמנטרית מסוג שני היא הכפלה של שורה מסוימת במספר שונה מאפס. את הפעולה של "הכפלת השורה השניה ב $\frac{1}{5}$" שראינו מסמנים ב $R_2 \leftarrow \frac{1}{5}R_2$ ורושמים בהתאם

$$\begin{cases} x+2y &= 1 \\ 5x+10y &= 15 \end{cases} \xrightarrow{R_2 \leftarrow \frac{1}{5}R_2} \begin{cases} x+2y &= 1 \\ x+y &= 3 \end{cases}$$

ובאופן כללי: הפעולה של הכפלה שורה מספר i במספר αשונה מאפס מסמנים ב $R_i \leftarrow \alpha R_i$ ($\alpha \neq 0$).

הסוג השלישי (והאחרון) של פעולות הוא הוספת כפולה של שורה מסוימת לשורה אחרת. למשל, על המערכת

$$\begin{cases} x+2y+z &= 4 \\ 5x+2y-z &= 0 \\ -2x+0y+2z &= 1 \end{cases}$$

נוכל לבצע את הפעולה של "הוספת -5 פעמים השורה הראשונה לשורה השניה" ונקבל את המערכת

$$\begin{cases} x+2y+z & =4 \\ 0x-8y-6z & =-20 \\ -2x+0y+2z & =1 \end{cases}$$

כלומר, השורה הראשונה והשלישית נשארים אותה דבר. השורה השניה הופכת מ $5x+2y-z=0$ ל

$$\underbrace{(5x+2y-z)-5(x+2y+z)}_{0x-8y-6z}=\underbrace{0-5\cdot 4}_{-20}$$

שזה כמו לקחת את המשוואה השניה ולהוסיף לשני צידי השיוויון אותה דבר (כי $-5(x+2y+z)=-5\cdot 4$ מהמשוואה הראשונה). את הפעולה של הוספת -5 פעמים של שורה מספר 1 לשורה מספר 2 מסמנים ב $R_2\leftarrow R_2-5R_1$. באופן דומה אפשר לבצע את הפעולה $R_3\leftarrow R_3+2R_1$ ולקבל

$$\begin{cases} x+2y+z & =4 \\ 5x+2y-z & =0 \\ -2x+0y+2z & =1 \end{cases} \xrightarrow{R_3\leftarrow R_3+2R_1} \begin{cases} x+2y+z & =4 \\ 5x+2y-z & =0 \\ 0x+4y+4z & =9 \end{cases}$$

ובאופן כללי: את הפעולה של הוספת α פעמים שורה מספר j לשורה מספר i ($i\neq j$) מסמנים ב $R_i\leftarrow R_i+\alpha R_j$ ($i\neq j$).
כעת, נשתמש בפעולות אלו ונדגים איך גורמים למערכת נתונה להיות יותר פשוטה: נעבוד עם המערכת

$$\begin{cases} x+2y+z & =4 \\ 5x+2y-z & =0 \\ -2x+0y+2z & =1 \end{cases}$$

ונבצע את הפעולות הבאות (את שתי הפעולות הראשונות ראינו לפני רגע):

$$\begin{cases} x+2y+z & =4 \\ 5x+2y-z & =0 \\ -2x+0y+2z & =1 \end{cases} \xrightarrow{R_2\leftarrow R_2-5R_1} \begin{cases} x+2y+z & =4 \\ 0x-8y-6z & =-20 \\ -2x+0y+2z & =1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3+2R_1} \begin{cases} x+2y+z & =4 \\ 0x-8y-6z & =-20 \\ 0x+4y+4z & =9 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \begin{cases} x+2y+z & =4 \\ 0x+4y+4z & =9 \\ 0x-8y-6z & =-20 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3+2R_2} \begin{cases} x+2y+z & =4 \\ 0x+4y+4z & =9 \\ 0x+0y+2z & =-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y+z &= 4 \\ 0x+4y+4z &= 9 \\ 0x+0y+2z &= -2 \end{cases} \xrightarrow{R_3 \leftarrow \frac{1}{2}R_3} \begin{cases} x+2y+z &= 4 \\ 0x+4y+4z &= 9 \\ 0x+0y+z &= -1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftarrow -\frac{1}{4}R_2} \begin{cases} x+2y+z &= 4 \\ 0x+y+z &= \frac{9}{4} \\ 0x+0y+z &= -1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - R_3} \begin{cases} x+2y+z &= 4 \\ 0x+y+0z &= \frac{13}{4} \\ 0x+0y+z &= -1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_3} \begin{cases} x+2y+0z &= 5 \\ 0x+y+0z &= \frac{13}{4} \\ 0x+0y+z &= -1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2} \begin{cases} x+0y+0z &= -\frac{6}{4} \\ 0x+y+0z &= \frac{13}{4} \\ 0x+0y+z &= -1 \end{cases}$$

מכאן רואים שיש פתרון (יחיד) $x=-\frac{6}{4}, y=\frac{13}{4}, z=-1$ (מוזמנים להציב במערכת שהתחלנו איתה ולוודא שזה אכן פתרון).

תרגילים

1. נתונה המערכת:

$$\begin{cases} 0x+y+2z &= 3 \\ 2x+2y+6z &= 4 \\ 3x+0y+z &= 2 \end{cases}$$

(של 3 משוואות ו 3 נעלמים).

(א) בצעו את הפעולות הבאות (לפי הסדר):

- $R_1 \leftrightarrow R_2$
- $R_1 \leftarrow \frac{1}{2}R_1$
- $R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1$
- $R_3 \leftarrow R_3 + 3R_2$

מה המערכת שהתקבלה לאחר ביצוע הפעולות?

(ב) בצעו את הפעולות הבאות (לפי הסדר) על התשובה של הסעיף הקודם:

- $R_3 \leftarrow -\frac{1}{2}R_3$
- $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_3$
- $R_1 \leftarrow R_1 - R_2$

הסיקו מהו הפתרון למערכת (הציבו ובדקו שזה אכן הפתרון).

2. נתונה מערכת ששתי השורות הראשונות שלה הם:

$$\begin{cases} 5x-2y+4z+6w &= 0 \\ -10x+3y+2z &= -2 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

(א) איזה פעולה אפשר לעשות כדי לאפס את המקדם של x במשוואה השניה ? (כלומר לגרום ל -10 להפוך ל 0).

(ב) באופן כללי: אם נתונה מערכת ששתי השורות הראשונות שלה

$$\begin{cases} ax-2y+4z+6w &= 0 \\ bx+3y+2z &= -2 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

עבור $a \neq 0$, איזה פעולה אפשר לעשות כדי לאפס את המקדם של x במשוואה השניה ?

3. אבחנה (כל פעולה היא הפיכה): בהינתן מערכת מסוימת שביצענו עליה פעולה כלשהיא, נוכל למצוא פעולה נוספת שתחזיר אותנו למערכת המקורית. יותר מפורט:

- אם נבצע את הפעולה $R_i \leftrightarrow R_j$ואז נבצע שוב $R_i \leftrightarrow R_j$ נחזור למערכת המקורית. למשל: עבור המערכת

$$\begin{cases} 5x+2y-z &= 0 \\ x+2y+z &= 4 \\ 2x+0y+2z &= 1 \end{cases}$$

אם נבצע $R_1 \leftrightarrow R_2$ ואז נבצע (שוב) $R_1 \leftrightarrow R_2$ נחזור למערכת המקורית. הנה:

$$\begin{cases} x+2y+z &= 4 \\ 5x+2y-z &= 0 \\ 2x+0y+2z &= 1 \end{cases} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{cases} 5x+2y-z &= 0 \\ x+2y+z &= 4 \\ 2x+0y+2z &= 1 \end{cases} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{cases} x+2y+z &= 4 \\ 5x+2y-z &= 0 \\ 2x+0y+2z &= 1 \end{cases}$$

- אם נבצע את הפעולה $R_i \leftarrow \alpha R_i$ $(\alpha \neq 0)$ ואז $R_i \leftarrow \frac{1}{\alpha} R_i$ נחזור למערכת המקורית. למשל: עבור המערכת

$$\begin{cases} 5x+2y-z &= 0 \\ x+2y+z &= 4 \\ 2x+0y+2z &= 1 \end{cases}$$

אם נבצע $R_3 \leftarrow 5R_3$ ואז נבצע $R_3 \leftarrow \frac{1}{5} R_3$ נחזור למערכת המקורית. הנה:

$$\begin{cases} x+2y+z &= 4 \\ 5x+2y-z &= 0 \\ 2x+0y+2z &= 1 \end{cases} \xrightarrow{R_3 \leftarrow 5R_3} \begin{cases} x+2y+z &= 4 \\ 5x+2y-z &= 0 \\ 10x+0y+10z &= 5 \end{cases} \xrightarrow{R_3 \leftarrow \frac{1}{5} R_3} \begin{cases} x+2y+z &= 4 \\ 5x+2y-z &= 0 \\ 2x+0y+2z &= 1 \end{cases}$$

- עכשיו אתם ־ אם נבצע את הפעולה $R_i \leftarrow R_i + \alpha R_j$ איזה פעולה נוכל לעשות על מנת לחזור למערכת המקורית? למשל: עבור המערכת

$$\begin{cases} 5x+2y-z &= 0 \\ x+2y+z &= 4 \\ 2x+0y+2z &= 1 \end{cases}$$

והפעולה $R_3 \leftarrow R_3 + 2R_1$, החליפו את $?$ בפעולה המתאימה:

$$\begin{cases} x+2y+z &= 4 \\ 5x+2y-z &= 0 \\ 2x+0y+2z &= 1 \end{cases} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3+2R_1} \begin{cases} x+2y+z &= 4 \\ 5x+2y-z &= 0 \\ 4x+4y+4z &= 9 \end{cases} \xrightarrow{?} \begin{cases} x+2y+z &= 4 \\ 5x+2y-z &= 0 \\ 2x+0y+2z &= 1 \end{cases}$$

4. בונוס ־ רשות: פעולה אלמנטרית מהסוג השלישי היא $R_i \leftarrow R_i + \alpha R_j$ כאשר $i \neq j$. למה חשוב לדרוש ש $i \neq j$? מה יכול להתקלקל אם נאפשר $i = j$?