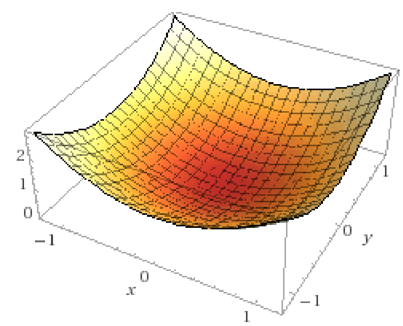
אינפי 3 – הרצאה 1

ספרים מומלצים:

W. Wade – introduction to analysis
Bers – calculus
M. spivale – analysis of manifolds
C.H. Edwards – advanced calculus

דוגמא:

$$t = f(x, y, z)$$
$$f(x, y) = x^2 + y^2$$
$$\Gamma_f = \{(x, y, z : z = f(x, y)\}$$



$$f(x_1, \dots, x_n), \big(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\big)$$

פרק 1

מרחב $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y): x, y \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z): x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

הגדרה

$\mathbb{R}^{n\in\mathbb{N}}$ הוא מרחב ליניארי מעל $\mathbb{R}$.

$$x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$$
$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$
$$\forall\lambda \in \mathbb{R}\ \lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

תכונות

אסוציאטיביות $x + y = y + x$

קומוטטיביות $x + (y + z) = (x + y) + z$

$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$$
$$(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$$
$$\exists 0 = (0, \dots, 0)$$
$$x + 0 = 0 + x = -x = (-x_1, \dots, -x_n)$$

גאומטריה ב$\mathbb{R}^n$

מכפלה פנימית

$$< x, y > \in \mathbb{R}$$

1) $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$

2) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

3) $\lambda\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, \lambda y\rangle$

4) $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$\langle x, x\rangle \geq 0$

מכפלה פנימית סטנדרטית ב$\mathbb{R}^n$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

אי שוויון קושי

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \boxed{|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}}$$

יש שוויון אם"ם x.y ת"ל.

הוכחה

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}: \varphi(\lambda) \coloneqq \langle y - \lambda x, y - \lambda y\rangle = \langle y, y\rangle - 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\langle x, x\rangle \geq 0$$

$$\varphi(\lambda) \geq 0 \Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac \leq 0$$
$$\Delta = 4\langle x, y\rangle^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq 0$$

והשאר טריוויאלי.

זווית

$$x, y \in \mathbb{R}^n - \{0\}$$

$-1 \leq \frac{\langle x,y\rangle}{\sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}} \leq 1$ לפי אי שוויון קושי

$$\exists \varphi \in [0, \pi] : cos\varphi = \frac{\langle x, y\rangle}{\sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}}$$
$$\varphi \coloneqq \widehat{\langle x, y\rangle}$$
$$\langle x, y\rangle = \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}cos\varphi$$

נורמא

$$||x||$$

מקיים:

1) $||x|| \geq 0$

$||x|| = 0 \Leftrightarrow x = x$

2) $||ax|| = |a|||x||$

3) $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$

נורמא אוקלידית

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$||x|| \coloneqq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

אי שוויון קושי

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x||||y||$$

$$||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$$

הוכחה

$$||x+y||^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \leq ||x|| + 2||x||||y|| + ||y|| = (||x|| + ||y||)^2$$

$$||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$$

נורמות ב$\mathbb{R}^n$

$$||x||_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$$

$$||x||_\infty \coloneqq \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

נורמ-$\mathrm{l_p}$א

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \;\; p \geq 1$$

$$||x||_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

תרגיל בית

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \lim_{p\to\infty} ||x||_p = ||x||_\infty$$

משפט:

$||x||_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ נורמא

הוכחה

$$||x||_p \geq 0$$

$$||x||_p \Leftrightarrow ||x||_p = 0$$

$$||\lambda x||_p = |\lambda|||x||_p$$

נשאר להוכיח אי שוויון המשולש:

אי שוויון משולש: אי שוויון של Minkowski

משפט (אי שוויון של Young)

$p,q \geq 1$ נקראים צמודים אם $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

עבור p,q כאלה מתקיים:

$$\forall a,b>0 : ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

הוכחה

$\varphi(x)=e^x$ – קמורה (קעורה למעלה)

$$\varphi''(x)=e^x>0$$

אי שוויון ינסן:

$$\varphi(tx+(1-t)y) \leq t\varphi(x)+(1-t)\varphi(y)$$
$$e^{tx+(1-t)y} \leq te^x+(1-t)e^y$$
$$\left\{t=\frac{1}{p}, 1-t=\frac{1}{q}\right\}$$
$$x=p\ln a , y=q\ln b$$
$$e^{\frac{1}{p}*p\ln(a)+\frac{1}{q}q\ln(b)} \leq \frac{1}{p}e^{p\ln(a)}+\frac{1}{q}e^{q\ln(b)}$$
$$ab \leq \frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q$$

משפט (אי שוויון של Holder)

$$x,y \in \mathbb{R}^n$$
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

אזי:

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i y_i| \leq ||x||_p ||y||_q$$

הוכחה

אם $x=0 \vee y=0$ ברור, נניח שלא.

1) $||x||_p=||y||_q=1$ אזי

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i y_i| \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{|x_i|^p}{p}+\frac{|y_i|^p}{q}\right)=\frac{1}{p}\sum|x_i|^p+\frac{1}{q}\sum|y_i|^q=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

2) אחרת ננרמל את הווקטורים:

$$x' := \frac{x}{||x||_p}, y' = \frac{y}{||x||_q}$$
$$\sum |x_i' y_i'| \le 1$$
$$\sum \frac{|x_i||y_i|}{||x||_p ||y||_q} \le 1$$
$$\sum |x_i y_i| \le ||x||_p ||y||_q$$

הוכחה של אי שוויון מינקובסקי

$$||x+y||_p \le ||x||_p + ||y||_p$$

הוכחה

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow q = \frac{p}{p-1}$$

$$||x+y||_p^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p = \sum |x_i + y_i||x_i + y_i|^{p-1} \le \sum |x_i||x_i + y_i|^{p-1} + \sum |y_i||x_i + y_i|^{p-1}$$
$$\le \{Holder\} \le \left(\sum |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |x_i + y_i|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |x_i + y_i|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$||x+y||^p \le \left(||x||_p + ||y||_p\right)\left(\sum |x_i + y_i|^p\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

אבל

$$\left(\sum |x_i + y_i|^p\right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} = ||x+y||_p^{p-1}$$

ולכן $||x+y||_p^p \le \left(||x||_p + ||y||_p\right) ||x+y||_p^{p-1}$

$$||x+y||_p \le ||x||_p + ||y||_p$$

טופולוגיה ב$\mathbb{R}^n$

מרחק

$||x||$ נורמא, אזי $\rho(x,y) := ||x-y||$ מטריקה

כדור

$$B(a,r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(a,x) < r\} = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x-a|| < r\}$$

a מרכז, r רדיוס