

## תרגיל 9 טופולגיה תשע"ו

18 במאי 2016

1. יהיו  $\{(X_i, d_i)\}_{i=1}^n$  מרחבים מטריים. הראו שמרחב המכפלה  $X = \prod X_i$  הוא מטריזבילי (עם טופולוגיית המכפלה).

2. יהי  $(X, d)$  מרחב מטרי. הוכיחו שהפונקציה:  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה (לפי טופולוגיית המכפלה).

3. יהי  $X$  מ"ט. נגדיר את האלכסון של  $X$  באופן הבא:

$$\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\} \subseteq X \times X$$

הוכיחו שהקבוצה  $\Delta$  סגורה אם ורק אם  $X$  האוסדורף.

4. יהיו  $X, Y$  מרחבים טופולוגיים.

(א) תהינה  $A \subseteq X, B \subseteq Y$  סגורות. הוכיחו שהקבוצה  $A \times B \subseteq X \times Y$  סגורה.

(ב) תהינה  $A \subseteq X, B \subseteq Y$ . הוכיחו שמתקיים:  $cl(A \times B) = cl(A) \times cl(B)$ .

(ג) נניח שהמרחבים  $X, Y$  ספרביליים. האם  $X \times Y$  ספרבילי?

5. יהי  $X$  מרחב טופולוגי ותהי  $I$  קבוצת אינדקסים. במרחב המכפלה  $\prod_{i \in I} X$  נסמן ב- $v_x$  את הוקטור (האינסופי) שכל רכיביו הם  $x$ . נסמן:  $Y = \{v_x \mid x \in X\}$ . הוכיחו ש:  $X \cong Y$ .

6. יהיו  $\{(X_i, \tau_i)\}_{i=1}^n$  מרחבים טופולוגיים  $T_1$ . הוכיחו שמרחב המכפלה הוא  $T_1$ .

7. יהי  $(X, \tau_{cof})$  מרחב אינסופי. האם טופולוגיית המכפלה  $\tau_\pi$  על  $X \times X$  היא הטופולוגיה הקורסופית על  $X \times X$ ?

8. מצאו דוגמה למרחב טופולוגי  $(X, \tau)$ , קבוצה צפופה  $A \subseteq X$  ופונקציות רציפות  $f, g : X \rightarrow X$  שונות המתלכדות על  $A$ .

9. יהיו  $X, Y$  מרחבים טופולוגיים. הוכיחו ש:  $X \times Y \cong Y \times X$ .