# פתרון בוחן אמצע – אינפי 2

ענו על **אחת** מבין שתי השאלות 1 – 2 . (21 נקודות לשאלה)

**1.** יהי $P(x)$ פולינום ממעלה זוגית, ותהא נקודה $c$ כך ש $P(c)=0, P'(c)\neq 0$. הוכיחו שקיימים לפחות שני שורשים ממשיים שונים לפולינום – כלומר קיימים $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ כך ש $\alpha\neq\beta$ ו $P(\alpha)=P(\beta)=0$.

הוכחה:

$p(x)=a_n x^{2n}+\ldots+a_0=x^{2n}\left(a_{2n}+\frac{a_{2n-1}}{x}+\ldots+\frac{a_0}{x^{2n}}\right)$ . $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^{2n}=\infty$ ,

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} a_{2n}+a_{2n-1}x+\ldots+\frac{a_0}{x^{2n}}=a_{2n}$ ולכן $\lim\limits_{x\to\pm\infty} p(x)=sign(a_{2n})\infty$ . נניח לכן בלי הגבלת הכלליות ש $\lim\limits_{x\to\pm\infty} p(x)=\infty$ (אחרת נכפיל את הפולינום במינוס).

$p$ גזירה בכל מקום לכן בנקודות קיצון מקומיות הנגזרת שלה מתאפסת (משפט פרמה), לכן $c$ אינה נקודת קיצון. לכן אין לה סביבה בה הפולינום גדול מאפס, ואין לה סביבה בה הפולינום קטן מאפס.
במילים אחרות, בכל סביבה שלה הפולינום גם גדול מאפס, וגם קטן מאפס. לכן קיימת נקודה $a$ כך ש $p(a)<0$ וברור ש $a\neq c$. אבל הפולינום שואף לאינסוף בשני קצותיו ולכן בהכרח חוזר להיות חיובי מימין ומשמאל ל $a$, ולפי משפט ערך הביניים הפונקציה מתאפסת לפחות פעמיים – פעם בקטע $(a,\infty)$ ופעם בקטע $(-\infty,a)$.

**2.** יהי פולינום $P(x)=x^n+ax^2+b$ עבור $n$ אי זוגי. הוכח שלפולינום אין יותר משלושה שורשים ממשיים.

הוכחה:

נניח בשלילה שיש 4 שורשים ממשיים. הפולינום רציף, ולכן לפי משפט רול בין כל שתי נקודות בהן ערך הפולינום שווה, נגזרתו מתאפסת. לכן הנגזרת מתאפסת 3 פעמים. לכן הנגזרת השנייה מתאפסת 2 פעמים.

$p''(x)=n(n-1)x^{n-2}+2a$ . הנגזרת של זה הינה $p'''(x)=n(n-1)(n-2)x^{n-3}$ אבל $n-3$ זוגי ולכן $p'''$ אי שלילית, ולכן $p''$ מונוטונית ובפרט לא יכולה לחתוך את ציר x פעמיים, סתירה.

(יש עוד דרכים לפתור את התרגיל, אבל העקרון הוא משפט רול כמובן).

ענו על שאלה 3 (20 נק')

**3.** פתרו **שניים** מבין שלושת הסעיפים:

א. $\int \frac{dx}{3+2\cos(x)}$ ב. $\int_{-1}^{0} x^2\sqrt{1-x^2}dx$ ג. $\int \arctan(\sqrt{x})\,dx$.

פתרון:

א. נבצע את ההצבה האוניברסלית

$$\int\frac{dx}{3+2\cos x}=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{3+2\frac{1-t^2}{1+t^2}}dt=\int\frac{2}{3(1+t^2)+2(1-t^2)}dt=2\int\frac{dt}{5+t^2}=\frac{2}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{5}}\right)+C$$

ב. נבצע את ההצבה $x=\sin t, dx=\cos t dt$ ונקבל

$$\int_{-1}^{0}x^2\sqrt{1-x^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}=\arcsin(-1)}^{0=\arcsin 0}\sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 t\cos^2 tdt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)^2dt=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)^2dt=\frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(1-\cos 4t)dt=\frac{1}{8}(t-\frac{1}{4}\sin 4t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}=\frac{\pi}{16}$$

ג. נבצע את ההצבה $t=\sqrt{x}, t^2=x, dx=2tdt$ ונקבל

$$\int\arctan\sqrt{x}dx=\int 2t\arctan tdt=t^2\arctan t-\int\frac{t^2}{1+t^2}dt=t^2\arctan t-\int\frac{1-1+t^2}{1+t^2}dt$$

$$=t^2\arctan t-\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=t^2\arctan t-t+\arctan t=(x+1)\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$$

ענו על שאלה 4 ( 20 נק' )

**4.**

**א.** תהי פונקציה $f$ כך שקיימת לה קדומה בקטע $[a,b]$. הוכיחו/הפריכו : $f$ אינטגרבילית בקטע .

ראה פתרון תרגיל 6

**ב.** יהיו $f,g$ אינטגרביליות בקטע $[a,b]$. הוכיחו שהפונקציה $\min(f,g)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ .

ראה פתרון תרגיל 7

ענו על **שלוש** מבין ארבעת השאלות 5-8 ( 13 נק' לשאלה ) :

**5.** חשבו את הגבול הבא: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-\sin x}{x^3}$

פתרון: קל לוודא שהמונה והמכנה שואפים לאפס (גם בהמשך התרגיל, אני לא אחזור על זה) ולכן ניתן להפעיל את כלל לופיטל

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)\cos x-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\frac{\cos(\sin x)-1}{3x^2}=$$

לפי אריתמטיקה של גבולות, מכיוון ש $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ הגבול הנל שווה ל:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(\sin x)\cos x}{6x}=\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\frac{-\sin(\sin x)}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(\sin x)}{6x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos(\sin x)\cos x}{6x}=-\frac{1}{6}$$

**6.** יהיו $f,g,h$ חסומות בקטע $[a,b]$ כך ש $f \le g \le h$ בקטע. <u>הוכיחו/הפריכו</u> : אם $f,h$ אינטגרביליות בקטע , אז גם $g$ אינטגרבילית בקטע .

הפרכה: ניקח $g = D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ , $h \equiv 1$ , $f \equiv 0$ . ברור ש $f \le g \le h$ בקטע.

הקבועות $f,h$ אינטגרביליות כי הן רציפות. פונקצית דירכליי אינה אינטגרבילית או לפי סכומי דרבו (העליון הוא $a-b$ והתחתון 0) או לפי משפט לבג, כל הנקודות בקטע הן נקודות אי רציפות ולכן כמות נקודות אי הרציפות אינה ממידה אפס (**לא מספיק לומר שיש אינסוף נקודות אי רציפות! יש פונקציות עם אינסוף נקודות אי רציפות שהן אינטגרביליות** כפי שראינו בתרגיל).

והפרכנו.

**7.** תהי $f$ רציפה ב – $[1,2]$ כך ש $\int_1^2 f(x)dx > 1$ :

<u>ענו על **אחד** מבין שני הסעיפים הבאים</u>:

**א.** <u>הוכח /הפרך</u> : קיימת נקודה c בקטע $[1,2]$ עבורה מתקיים $f(c) > 1$

הוכחה: נובע ישירות ממשפט ערך הממוצע האינטגרלי שכן אורך הקטע הינו אחד. קיימת נקודה $c$ בקטע כך ש $f(c) = \frac{1}{2-1}\int_1^2 f(x)dx > 1$

**ב.** <u>הוכח / הפרך</u> : קיימת נקודה $b$ בקטע הפתוח $(1,2)$ עבורה מתקיים $\int_1^b f(x)dx = 1$

הוכחה: לפי משפט הפונקציה $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ רציפה תמיד לכל פונקציה אינטגרבילית $f$ (אפילו לא צריך רציפה). $F(1)=0, F(2)>1$ לכן לפי משפט ערך הביניים קיבלנו את מה שרצינו.

**8**. תהי $f$ גזירה בקטע $(a,b)$, ותהי $x_0 \in (a,b)$ כך ש $f'(x_0)=0$ . <u>הוכיחו/הפריכו</u>: $x_0$ הינה נקודת מינימום מקומי <u>או</u> נקודת מקסימום מקומי <u>או</u> נקודת פיתול של $f$ . (<u>רמז</u>: הפריכו.)

הפרכה: ניזכר בנוסחאת טיילור $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(c)(x-x_0)^2$ . במקרה שלנו הנגזרת מתאפסת ולכן $f(x)-f(x_0)=\frac{1}{2}f''(c)(x-x_0)^2$ . סימן צד ימין נקבע בלבד על ידי הנגזרת. לכן על מנת הפונקציה לא תהייה מינמום, מקסימום או פיתול, הנגזרת השנייה חייבת להיות גם חיובית וגם שלילית לפחות בסביבה מצד אחד של $x_0$. שימו לב שזה תנאי הכרחי ובמידה וקיימת נגזרת שנייה, אבל לא בהכרח מספיק. לא הבאתי את הנימוק הזה מפני שהוא הכרחי, אלא על מנת להראות כיוון מחשבה בעזרתו ניתן לפתור את התרגיל.

פונקציה שאנחנו מכירים שמתנהגת ככה הינה $f(x)=x^2\sin(\frac{1}{x})$ (הפונקציה מוגדרת להיות אפס בנקודה $x_0=0$) היא אמנם לא גזירה פעמיים באפס, אבל היא מספיקה. $f(x_0)=f(0)=0$ ו $f'(0)=0$ לכן המשיק בנקודה $x_0=0$ הינו ציר $x$. נוכיח שהיא שלילית וחיובית בכל סביבה ימנית של אפס, ולכן היא לא תהיה מינימום או מקסימום (כי היא עולה ויורדת מעל הערך של הפונקציה באפס בכל סביבה של אפס) והיא לא תהיה פיתול (כי היא עולה ויורדת מעל המשיק בכל סביבה ימנית של אפס).

ניקח את הסדרות $a_n=\dfrac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}$ , $b_n=\dfrac{1}{2\pi n-\frac{\pi}{2}}$ ברור ששתי הסדרות שואפות לאפס מימין, ומתקיים $f(a_n)=a_n^2>0,\ f(b_n)=-b_n^2<0$ מ.ש.ל.