פתרון מבחן מועד א' – 89-133-01/02 אינפי 2 – 29/06/18

מרצים: דר' שמעון ברוקס ודר' ארז שיינר. חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.

משקל כל שאלה 22 נק', ענו על כל השאלות. משך המבחן: שלוש שעות.

1. חשבו את האינטגרלים הלא מסויימים הבאים:

א. $\int \frac{1}{x^4-1}dx$

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{1}{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)}=\frac{1}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)}$$

נפרק לשברים חלקיים

$$\frac{1}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}=$$

$$=\frac{A\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)+B\left(x-1\right)\left(x^2+1\right)+\left(Cx+D\right)\left(x-1\right)\left(x+1\right)}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)}$$

לכן

$$A\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)+B\left(x-1\right)\left(x^2+1\right)+\left(Cx+D\right)\left(x-1\right)\left(x+1\right)=1$$

נציב $x=1$ ונקבל $4A=1$ ולכן $A=\frac{1}{4}$.

נציב $x=-1$ ונקבל $-4B=1$ ולכן $B=-\frac{1}{4}$

נציב $x=0$ ונקבל $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-D=1$ ולכן $D=-\frac{1}{2}$

נציב $x=2$ ונקבל $\frac{15}{4}-\frac{5}{4}+3\left(2C-\frac{1}{2}\right)=1$ ולכן $C=0$

סה"כ $\frac{1}{x^4-1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}$, ולכן $\int\frac{1}{x^4-1}dx=\frac{\ln\left|x-1\right|}{4}-\frac{\ln\left|x+1\right|}{4}-\frac{\arctan(x)}{2}+C$.

דרך שנייה לפירוק לשברים חלקיים בדף הבא:

<u>דרך שנייה</u> לפירוק לשברים חלקיים, קצת יותר קצרה אבל יותר טריקית:

קל לבצע את הפירוק הבא: $\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}$

לכן $\frac{1}{x^4-1}=\frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)(x+1)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}$

ושוב נשתמש בפירוק הראשון ונקבל $=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}\right]-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}$

ב. $\int x^3\sin\left(x^2\right)dx$

$$\int x^3\sin\left(x^2\right)dx=\begin{Bmatrix}t=x^2\\ dt=2xdx\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\int t\sin\left(t\right)dx=\begin{Bmatrix}f\,'=\sin(t),\,g=t\\ f=-\cos(t),\,g\,'=1\end{Bmatrix}=\frac{-t\cos(t)}{2}+\frac{1}{2}\int\cos(t)dt=$$

$$=\frac{-t\cos(t)}{2}+\frac{\sin(t)}{2}+C=\frac{-x^2\cos(x^2)}{2}+\frac{\sin(x^2)}{2}+C$$

2. קבעו לכל אינטגרל האם הוא מתכנס:

א. $\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{x^2}dx$

נפצל את האינטגרל לשני תחומים, נתחיל בתחום $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2}dx$,

כיוון שהפונקציה שלילית בתחום זה נסתכל על המינוס שלו $\int_0^1 \frac{-\ln(x)}{x^2}dx$, שהוא אינטגרל חיובי.

כמובן שאם מינוס האינטגרל מתכנס גם המקורי מתכנס, ואם הוא מתבדר, המקורי מתבדר.

נעשה מבחן השוואה גבולי לאינטגרלים חיוביים עם האינטגרל $\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{-\ln(x)}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}\left(-\ln(x)\right)=\infty$$

לכן כיוון שהאינטגרל ה"קטן יותר" $\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$ מתבדר, נובע כי גם $\int_0^1 \frac{-\ln(x)}{x^2}dx$ מתבדר.

לכן כמובן $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2}dx$ מתבדר, ולכן סה"כ כל האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{x^2}dx$ מתבדר.

ב. $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x^2}$

כמובן ש $\sin(x)$ פונקציה אי שלילית בתחום, ולכן נבצע מבחן השוואה גבולי עם $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin(x)}{x^2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

כלומר האינטגרלים חברים.

כיוון שהאינטגרל $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ מתבדר, כך גם האינטגרל $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x^2}$ מתבדר.

ג. $\int_0^\infty \frac{e^x+x}{e^{2x}+x}$

ראשית נשים לב כי מדובר בפונקציה חיובית.

נבצע מבחן השוואה גבולי עם $\int_0^\infty \frac{1}{e^x}dx$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{e^x+x}{e^{2x}+x}}{\frac{1}{e^x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x\left(e^x+x\right)}{e^{2x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}\left(1+\frac{x}{e^x}\right)}{e^{2x}\left(1+\frac{x}{e^{2x}}\right)}=1$$

כלומר האינטגרלים חברים, וכיוון שהאינטגרל $\int_0^\infty \frac{1}{e^x}dx$ מתכנס, גם האינטגרל $\int_0^\infty \frac{e^x+x}{e^{2x}+x}dx$ מתכנס.

הערה: ניתן להראות כי האינטגרל $\int_0^\infty \frac{1}{e^x}dx$ מתכנס במספר דרכים, הפשוטה ביותר היא החישוב שלו -

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^x}dx=\int_0^\infty e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^\infty=1$$

דרך שנייה בדף הבא.

<u>דרך שנייה</u>: נבצע מבחן השוואה גבולי עם $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{e^x+x}{e^{2x}+x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(e^x+x\right)}{e^{2x}+x}\underset{L'Hopital}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{2xe^x+x^2e^x+3x^2}{e^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{e^x}+\frac{x^2}{e^x}+\frac{3x^2}{e^{2x}}\right)=0$$

כיוון שהאינטגרל "הגדול יותר" $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$ מתכנס, גם האינטגרל $\int_1^{\infty}\frac{e^x+x}{e^{2x}+x}dx$ מתכנס.

3. תהי סדרת הפונקציות $f_n(x)=x^{\frac{1}{n}}$

א. מצאו את פונקציית הגבול של הסדרה בקטע $[0,1]$.

עבור $x=0$ מתקיים כי $f_n(0)=0^{\frac{1}{n}}=0$ ולכן הגבול הוא $f(0)=0$.

עבור $0<x\le 1$ מתקיים כי $x^{\frac{1}{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$ ולכן $f(x)=1$.

סה"כ פונקצית הגבול הינה $f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ 1 & 0<x\le 1\end{cases}$.

ב. האם הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע $[0,1]$?

כיוון שפונקצית הגבול $f(x)$ אינה רציפה בקטע $[0,1]$,

אך פונקציות הסדרה $f_n(x)$ כן רציפות, סימן שההתכנסות <u>אינה במ"ש</u>.

הרי אם הייתה התכנסות במ"ש של פונקציות רציפות, פונקצית הגבול הייתה רציפה.

ג. האם הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע $(0,1)$?

נחשב את סדרת החסמים: $d_n=\sup_{x\in(0,1)}\left|f_n(x)-f(x)\right|=\sup_{x\in(0,1)}\left|x^{\frac{1}{n}}-1\right|=1$

(החסם העליון מתקבל כאשר $x\to 0^+$.)

כיוון ש d_n אינה שואפת לאפס, ההתכנסות <u>אינה במ"ש</u>.

4. תהי f פונקציה רציפה בקטע $[0,\infty)$ כך שהאינטגרל $\int_0^\infty f(t)dt$ מתכנס למספר סופי.

(אין קשר בין הסעיפים)

א. נגדיר את הפונקציה $g(x)=\int_x^\infty f(t)dt$, הוכיחו כי $g'(x)=-f(x)$.

לפי ההגדרה

$$g(x)=\int_x^\infty f(t)dt=\lim_{u\to\infty}\int_x^u f(t)dt=\lim_{u\to\infty}F(u)-F(x)$$

כאשר F היא הקדומה של f .

כיוון ש $\int_0^\infty f(t)dt$ מתכנס למספר סופי, נובע כי הגבול $\lim_{u\to\infty}F(u)$ מתכנס למספר סופי, נקרא לו c .

לכן $g(x)=c-F(x)$, ולכן $g'(x)=-f(x)$.

<u>דרך שנייה:</u>

$$g'(x)=\left(\int_x^\infty f(t)dt\right)'=\left(\int_0^\infty f(t)dt-\int_0^x f(t)dt\right)'=-f(x)$$

ב.   תהי בנוסף $h(x)$ מונוטונית יורדת, בעלת נגזרת רציפה בקטע $[0,\infty)$, המקיימת $\lim_{t\to\infty} h(t)=1$.

הוכיחו כי האינטגרל $\int_0^\infty h(t)f(t)dt$ מתכנס.

הפונקציה $h(t)-1$ מונוטונית יורדת לאפס, ובעלת נגזרת רציפה.

כיוון שהאינטגרל $\int_0^\infty f(t)dt$ מתכנס למספר סופי, הפונקציה הקדומה F חסומה.

לכן לפי מבחן דיריכלה מתקיים כי האינטגרל $\int_0^\infty \left(h(t)-1\right) f(t)dt$ מתכנס.

אבל $\int_0^\infty \left(h(t)-1\right) f(t)dt=\int_0^\infty h(t)f(t)dt-\int_0^\infty f(t)dt$

ולכן $\int_0^\infty h(t)f(t)dt=\int_0^\infty \left(h(t)-1\right) f(t)dt+\int_0^\infty f(t)dt$ סכום של שני אינטגרלים מתכנסים הוא מתכנס.

5. תהי הפונקציה $f(x,y)=xe^y-ye^x$

א. לכל אחת מהנקודות הבאות מצאו כיוון אחד בו הנגזרת של f חיובית, כיוון אחד בו הנגזרת שלילית, וכיוון אחד בו הנגזרת מתאפסת, או הוכיחו שלא קיים כיוון כזה: $(0,0),(1,0),(0,-1)$.

ראשית, מדובר בפונקציה דיפרנציאבילית כיוון שהיא צירוף של פונקציות אלמנטריות.

כעת הגרדיאנט הינו $\nabla f(x,y)=\left(e^y-ye^x, xe^y-e^x\right)$.

ידוע כי כיוון הגרדיאנט הוא כיוון עלייה (העלייה הגדולה ביותר), הכיוון ההפוך לגרדיאנט הוא כיוון ירידה (הירידה התלולה ביותר) והכיוון המאונך לגרדיאנט הוא כיוון בו הנגזרת מתאפסת.

יוצא הדופן היחיד לכלל זה הוא המצב בו הגרדיאנט מתאפס ואז הנגזרת מתאפסת בכל הכיוונים.

עבור הנקודה $(0,0)$ הגרדיאנט הוא $\nabla f(0,0)=(1,-1)$ ולכן זה כיוון עלייה, $(-1,1)$ הוא כיוון ירידה, ו $(1,1)$ הוא כיוון בו הנגזרת הכיוונית מתאפסת.

עבור הנקודה $(1,0)$ הגרדיאנט הוא $\nabla f(1,0)=(1,0)$ ולכן זה כיוון עלייה, $(-1,0)$ הוא כיוון ירידה, ו $(0,1)$ הוא כיוון בו הנגזרת הכיוונית מתאפסת.

עבור הנקודה $(0,-1)$ הגרדיאנט הוא $\nabla f(0,-1)=\left(\frac{1}{e}+1,-1\right)$ ולכן זה כיוון עלייה, $\left(-\frac{1}{e}-1,1\right)$ הוא כיוון ירידה, ו $\left(1,\frac{1}{e}+1\right)$ הוא כיוון בו הנגזרת הכיוונית מתאפסת.

ב. קבעו האם $(1,1)$ היא נקודת מקסימום, מינימום או אוכף.

ראשית, אכן הגרדיאנט מתאפס בנקודה זו, כלומר $\nabla f(1,1)=(0,0)$ ולכן מדובר בנקודה חשודה שאפשר לסווג באמצעות ההסיאן.

נחשב את הנגזרות החלקיות:

$$f_x = e^y - ye^x$$
$$f_y = xe^y - e^x$$
$$f_{xx} = -ye^x$$
$$f_{yy} = xe^y$$
$$f_{xy} = e^y - e^x$$

עבור הנקודה שלנו נקבל כי

$$f_{xx}(1,1) = -e$$
$$f_{yy}(1,1) = e$$
$$f_{xy}(1,1) = 0$$

כעת $D(1,1) = f_{xx}(1,1)\cdot f_{yy}(1,1) - f_{xy}^2(1,1) = -e^2 < 0$

ולכן מדובר בנקודת אוכף.