05.09.17

פתרון 88-112 אלגברה לינארית 1 – קורס קיץ תשע"ח – מועד א'

מרצים: דר' שמעון ברוקס, דר' אלי מצרי, דר' ארז שיינר

מתרגלים: ניקול בלשוב, עדי בן-צבי, תמר בר-און, עוזי חרוש, מיכאל טויטו, עקיבא מלכה, פולינה לוצקר

אורך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.

הוראות:

- יש לענות על **כל** 5 השאלות. סה"כ הניקוד המקסימלי 105 נק' (כל ציון מעל 100 יעוגל ל100).
- יש לענות על **דפי הבחינה** בלבד. ניתן להשתמש במחברת כטיוטה, אך המחברת **לא תיבדק כלל**.

שאלה	ניקוד
1	
2	
3	
4	
5	
סה"כ	

חלק א'

1. (12 נק')

א. יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית, ויהי $B=\{v_1,...,v_n\}$ בסיס סדור ל V.

הוכיחו כי לכל $v\in V$ <u>קיימת</u> הצגה <u>יחידה</u> $v=a_1v_1+...+a_nv_n$ כצירוף לינארי של איברי הבסיס.

ב. יהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה, ותהי $T:V\to W$ העתקה לינארית.

הוכיחו כי T חח"ע אם ורק אם $\ker T=\{0_V\}$.

הוכחות מההרצאה.

2. (24 נק') יהיו V,W מרחבים וקטוריים נוצרים סופית מעל אותו שדה, ותהיינה $T,S:V\to W$ העתקות לינאריות. **הוכיחו או הפריכו** את הטענות הבאות:

א. אם S הפיכה, ו $T\circ S^{-1}$ חח"ע אזי T הפיכה.

<u>הוכחה</u>: ההעתקה $T\circ S^{-1}:W\to W$ היא אופרטור (ממרחב לעצמו), לכן כיוון שהיא חח"ע היא גם על והפיכה. כיוון שהיא על, נובע כי T היא על. כיוון ש S הפיכה, נובע כי $\dim V=\dim W$. ביחד, כיוון ש $T:V\to W$ על, ומימדי המרחבים שווים, נובע שהיא הפיכה.

ב. אם T על ו S חח"ע אזי T הפיכה.

<u>הוכחה</u>: כיוון ש $T:V\to W$ על נובע כי $\dim V\geq \dim W$. כיוון ש $S:V\to W$ חח"ע נובע כי $\dim V\leq \dim W$. ביחד ניתן להסיק כי $\dim V=\dim W$. ביחד, כיוון ש $T:V\to W$ על, ומימדי המרחבים שווים, נובע שהיא הפיכה.

ג. אם $\ker T \subseteq \ker S$ וגם $\operatorname{Im} T \subseteq \operatorname{ImS}$ אזי $T = S$.

<u>הפרכה</u>:

נביט בהעתקות $T,S:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ המוגדרות ע"י

$$T(x,y)=(x,y)$$
$$S(x,y)=(y,x)$$

קל לוודא כי

$$\ker T = \ker S = \{(0,0)\}$$
$$\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} S = \mathbb{R}^2$$

אך $T \neq S$.

ד. אם $\ker T \oplus \ker S = V$ אזי $T+S$ חח"ע.

<u>הפרכה</u>:

נביט בהעתקות $T,S:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ המוגדרות ע"י

$$T(x,y)=(0,y)$$
$$S(x,y)=(0,x)$$

קל לוודא כי

$$\ker T = span\{(1,0)\}$$
$$\ker S = span\{(0,1)\}$$

ולכן אכן $\ker T \oplus \ker S = \mathbb{R}^2$

אך $(T+S)(x,y)=(0,x+y)$ אינה פונקציה חח"ע.

3. (10 נק') תהיינה $A \in \mathbb{R}^{n\times m}, B \in \mathbb{R}^{n\times k}$. נתון כי קיימת מטריצה יחידה C המקיימת $A = BC$. הוכיחו או הפריכו: $rank(B)=k$.

<u>הוכחה</u>:

לפי כפל עמודה, $C_1(A) = B \cdot C_1(C)$.

כיוון שקיימת C יחידה, זה אומר שלמערכת $Bx = C_1(A)$ יש פתרון יחיד - $x = C_1(C)$.

לכן כל k המשתנים בה תלויים, ולכן $rank(B)=k$.

חלק ב'

4. תהי מטריצה $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 5\\ -1 & -2 & -5\end{pmatrix}$.

נגדיר $U=\left\{v\in\mathbb{R}^3 \mid Av=-v\right\}$, $W=\left\{\begin{pmatrix}a+b\\ -b\\ a-b\end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}$.

א. (5 נק') הוכיחו כי U,W תתי מרחב של $\mathbb{R}^3$.

$U=\left\{v\in\mathbb{R}^3 \mid Av=-v\right\}=\left\{v\in\mathbb{R}^3 \mid Av+v=0\right\}=\left\{v\in\mathbb{R}^3 \mid (A+I)v=0\right\}=N(A+I)$

ידוע שמרחב האפס של מטריצה הוא תת מרחב.

$$W=\left\{\begin{pmatrix}a+b\\ -b\\ a-b\end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}=\left\{a\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\ -1\\ -1\end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ -1\\ -1\end{pmatrix}\right\}$$

ידוע ש $span$ הוא תת מרחב.

ב. (10 נק') מצאו בסיסים ומימדים ל U,W.

נדרג את המטריצה $A+I=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 5\\ -1 & -2 & -4\end{pmatrix}$ קנונית, על מנת למצוא את הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 5\\ -1 & -2 & -4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

נסמן את המשתנה החופשי באמצעות פרמטר $y=t$, ונקבל את הפתרון הכללי $(-2t,t,0)=t(-2,1,0)$.

לכן הבסיס ל U הינו $\left\{\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right\}$ והמימד שלו הוא 1.

עבור W קל לראות ששני הוקטורים שפורשים אותו בת"ל (הם לא פרופורציונאליים) ולכן הבסיס ל W הינו $\left\{\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ -1\\ -1\end{pmatrix}\right\}$ והמימד שלו הוא 2.

ג. (7 נק') מצאו בסיסים ומימדים ל $U+W, U\cap W$.

$$U+W=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

נשים את הוקטורים בעמודות ונדרג:

$$\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&-1&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&-1&1\\0&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

לכן הוקטור השלישי מיותר, ושני הוקטורים הראשונים בת"ל ומהווים בסיס כלומר

$$U+W=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\}=W$$

לפי משפט המימדים $\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$,

ולכן $\dim U=\dim(U\cap W)$.

כיוון ש $U\cap W\subseteq U$, לפי הכלה חד כיוונית ושיוויון מימדים נובע כי $U\cap W=U$.

גילינו שהחיתוך והסכום שווים למרחבים עצמם. את הבסיסים והמימדים שלהם מצאנו כבר בסעיף הקודם.

ד. (7 נק') מצאו מטריצה B עבורה $ABA=I$ (אין קשר לסעיפים האחרים).

ראשית נוכיח כי A הפיכה, ונמצא את A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

לכן $A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

כעת, $ABA=I$ אם ורק אם $BA=A^{-1}$ (כפלנו משמאל בהופכית של A), אם ורק אם $B=\left(A^{-1}\right)^2$ (כפלנו מימין בהופכית של A).

נעלה את ההופכית בריבוע ונמצא כי

$$B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{-4}{25} & \frac{-8}{25} & \frac{-9}{25} \end{pmatrix}$$

5. נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1+a & 1 & 0\\ 1+a^2 & 0 & a-1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

א. (3 נק') חשבו את $|A|$.

נפתח לפי העמודה השנייה:

$$|A|=\left|\begin{pmatrix}1+a & 1 & 0\\ 1+a^2 & 0 & a-1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\right|=-1\cdot\begin{vmatrix}1+a^2 & a-1\\ 0 & -1\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}1+a & 0\\ 1+a^2 & a-1\end{vmatrix}=\left(1+a^2\right)-\left(a^2-1\right)=2$$

ב. (8 נק') מצאו את A^{-1}.

ניתן לדרג את המטריצה ולמצוא את ההופכית בשיטה הרגילה, אך כאן הפתרון הזה אינו אידיאלי כיוון שצריך לדרג קנונית מטריצה עם פרמטר.

במקום זאת, נשתמש בנוסחא הנכונה למטריצות הפיכות $A^{-1}=\frac{adj(A)}{|A|}$. (אכן המטריצה הפיכה כיוון שהדטרמיננטה שלה שונה מאפס).

כעת
$$\left(adj(A)\right)^t=\begin{pmatrix}1-a & 1+a^2 & 1+a^2\\ 1 & -1-a & -1-a\\ a-1 & 1-a^2 & -1-a^2\end{pmatrix}$$

ולכן
$$adj(A)=\begin{pmatrix}1-a & 1 & a-1\\ 1+a^2 & -1-a & 1-a^2\\ 1+a^2 & -1-a & -1-a^2\end{pmatrix}$$

וסה"כ
$$A^{-1}=\frac{adj(A)}{|A|}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-a & 1 & a-1\\ 1+a^2 & -1-a & 1-a^2\\ 1+a^2 & -1-a & -1-a^2\end{pmatrix}$$

ג. (8 נק') מצאו את כל ערכי a עבורם $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ היא עמודה של A^{-1}.

אם פתרתם את סעיף ב' נכון, פשוט צריך לדרוש שאחת העמודות

$\begin{pmatrix} a-1 \\ 1-a^2 \\ -1-a^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1-a \\ -1-a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-a \\ 1+a^2 \\ 1+a^2 \end{pmatrix}$ תהיה שווה ל $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

קל מאד לראות שזה קורה עבור $a=0,-2$.

נציג פתרון במקרה בו לא פתרנו את סעיף ב' נכון:

ידוע כי $AA^{-1}=I$. לכן על מנת ש $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ תהא עמודה של A^{-1} צריך ש $A\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}=e_i$ עבור אחד מבין $i=1,2,3$.

(כיוון ש A הפיכה יש פתרון יחיד למערכת $Ax=e_i$ לכל i, ולכן זו תהיה חייבת להיות עמודה של A^{-1}.)

כעת $\begin{pmatrix} \frac{2+a}{2} \\ \frac{a^2+a}{2} \\ 0 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

ברור שזה לא יכול להיות e_3.

על מנת שזה יהיה e_1 צריך ש $\frac{2+a}{2}=1, \frac{a^2+a}{2}=0$ וזה נכון עבור $a=0$.

על מנת שזה יהיה e_2 צריך ש $\frac{2+a}{2}=0, \frac{a^2+a}{2}=1$ וזה נכון עבור $a=-2$.

ד. (3 נק') מצאו את כל ערכי a עבורם $A+I$ אינה הפיכה.

נחשב את הדטרמיננטה של $A+I=\begin{pmatrix} 2+a & 1 & 0 \\ 1+a^2 & 1 & a-1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ לפי השורה האחרונה:

$$|A+I|=\left|\begin{pmatrix} 2+a & 1 & 0 \\ 1+a^2 & 1 & a-1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right|=-\begin{vmatrix} 2+a & 0 \\ 1+a^2 & a-1 \end{vmatrix}=(2+a)(1-a)$$

כעת $A+I$ הפיכה אם ורק אם $|A+I|\neq 0$ אם ורק אם $a\neq 1,-2$.

לכן סה"כ התשובה הינה $a=1,-2$.

ה. (8 נק') מצאו את כל ערכי a עבורם $A^{-1}+I$ אינה הפיכה.

נשים לב כי $A^{-1}\left(A+I\right)=I+A^{-1}=A^{-1}+I$.

כלומר, אם $A+I$ הפיכה אזי גם $A^{-1}+I$ הפיכה כמכפלה של הפיכות.

מצד שני, גם $A\left(A^{-1}+I\right)=I+A=A+I$

כלומר אם $A^{-1}+I$ הפיכה, אזי $A+I$ הפיכה כמכפלה של הפיכות.

ביחד, $A+I$ הפיכה אם ורק אם $A^{-1}+I$ הפיכה, ולכן התשובה זהה לתשובה של סעיף קודם.