מבחן מועד ג' – 83-112 חדו"א 1 להנדסה – 08/04/21

מרצה: דר' ארז שיינר | משך המבחן: שלוש שעות | חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק' | ענו על כל השאלות | כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(2x)}{xe^{3x}-xe^{4x}}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\underbrace{1+\cos(2x)}_{\to 2}\right)\cdot\underbrace{\frac{1-\cos(2x)}{(2x)^2}}_{\to\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{(2x)^2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{e^{3x}-e^{4x}}}_{\to -4}=-4$$

ההסבר לגבול האחרון:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x}{e^{3x}-e^{4x}}=\left\{\frac{0}{0},L'Hopital\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{4}{3e^{3x}-4e^{4x}}=-4$$

ב. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(2x)^{3x}-1}{x\cdot\ln(x^4)}$

$$\lim_{x\to 0^+}(2x)^{3x}=\lim_{x\to 0^+}2^{3x}\cdot(x^x)^3=1\cdot 1^3$$

כאשר פתרנו בכיתה (במבחן צריך לפתור את זה) ש

$$x^x\to_{x\to 0^+}1$$

כיוון שאנחנו באים מהכיוון החיובי

$$xln(x^4)=4xln(x)\to_{x\to 0^+}0$$

גם גבול זה ראינו בכיתה ויש צורך להראות במבחן.

מכאן יש שתי דרכים להמשיך:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(2x)^{3x}-1}{4xln(x)}=\left\{\frac{0}{0},L'Hopital\right\}=\lim_{x\to 0^+}\frac{3(2x)^{3x}(\ln(2x)+1)}{4\ln(x)+4}=\frac{3}{4}$$

כאשר ההסברים למעברים בהמשך

$$((2x)^{3x})'=\left(e^{3x\ln 2x}\right)'=e^{3x\ln 2x}\left(3\ln(2x)+\frac{3x}{2x}\cdot 2\right)=3(2x)^{3x}(\ln(2x)+1)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(2x)+1}{4\ln(x)+4}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)+\ln(2)+1}{4\ln(x)+4}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{\ln(x)}\cdot\frac{1+\frac{\ln(2)+1}{\ln(x)}}{4+\frac{4}{\ln(x)}}=\frac{1}{4}$$

דרך שנייה לחישוב הגבול

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(2x)^{3x}-1}{xln(x^4)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\ln\left((2x)^{3x}\right)}-1}{4xln(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{3x\ln(2x)}-1}{4xln(x)}$$

זה מזכיר לנו את

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

כבר ראינו ואמרנו ש

$$\lim_{x\to 0^+}xln(x)=0$$

באופן דומה קל מאד להוכיח ש

$$\lim_{x\to 0^+}3xln(2x)=0$$

נעשה WIN

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{3x\ln(2x)}-1}{4xln(x)}=\lim_{x\to 0^+}\underbrace{\frac{e^{3x\ln(2x)}-1}{3xln(2x)}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{3xln(2x)}{4xln(x)}}_{\to\frac{3}{4}}=\frac{3}{4}$$

ג. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^n+n^4}{4+(4n)!}$

$$\frac{4^n+n^4}{4+(4n)!}=\frac{4^n}{(4n)!}\cdot\underbrace{\frac{1+\frac{n^4}{4^n}}{\frac{4}{(4n)!}+1}}_{\to 1}$$

נעשה עכשיו טריק נחמד, אמנם גם בלעדיו היינו פותרים את התרגיל

$$0<\frac{4^n}{(4n)!}\le\frac{4^n}{n!}$$

נוכיח באמצעות כלל המנה שהביטוי הימני שואף לאפס $\frac{4^n}{n!}\to 0$ ולכן לפי סנדביץ' וסה"כ הגבול שלנו הוא אפס.

$$\frac{4^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{4^n}=\frac{4}{n+1}\to 0<1$$

כיוון שגבול המנה קטן מאחד, הסדרה שואפת לאפס.

.2

א. חשבו את $\int \arctan(x)\,dx$.

$$\int \arctan(x)\,dx=\begin{Bmatrix} f'=1 & g=\arctan(x) \\ f=x & g'=\dfrac{1}{x^2+1}\end{Bmatrix}=x\cdot\arctan(x)-\int\frac{x}{x^2+1}dx=x\cdot\arctan(x)-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$$

$$\int\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$$

ב. חשבו את האינטגרל הבא $\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$.

$$\int_0^\infty xe^{-x^2}dx=\lim_{t\to\infty}\int_0^t xe^{-x^2}dx=\lim_{t\to\infty}-\frac{1}{2}\left(e^{-t^2}-1\right)=\frac{1}{2}$$

$$\int_0^t xe^{-x^2}dx=\begin{Bmatrix} u=e^{-x^2} \\ du=-2xe^{-x^2}dx \\ -\dfrac{1}{2}du=xe^{-x^2}dx\end{Bmatrix}=-\frac{1}{2}\int_1^{e^{-t^2}}du=-\frac{1}{2}[u]_1^{e^{-t^2}}=-\frac{1}{2}\left(e^{-t^2}-1\right)$$

3. נביט בפונקציה $f(x)=\sqrt{|(x-a^2)(x-3a+2)|}$

א. מצאו ערך של הפרמטר $a\in\mathbb{R}$ וערך של x כך שf אינה גזירה בנקודה x, הוכיחו תשובתכם.

כאשר $(x-a^2)(x-3a+2)\neq 0$ הפונקציה גזירה כצירוף של אלמנטריות גזירות.

צריך לבדוק מה קורה כאשר זה שווה אפס.

שימו לב, לא בטוח שזה לא יהיה גזירה כאשר הביטוי בתוך השורש והערך המוחלט מתאפס.

לדוגמא האם הפונקציה הבאה גזירה ב$x=0$?

$$\sqrt{|x^4|}$$

אבל

$$\sqrt{|x^4|}=\sqrt{x^4}=x^2$$

שבוודאי גזירה באפס.

נשווה את הביטוי בפנים לאפס

$$(x-a^2)(x-3a+2)=0$$

$$x=a^2, x=3a-2$$

ננחש $a=0$ ונציב אותו

$$f(x)=\sqrt{|x(x+2)|}$$

ונבחר $x=0$ בהתאם להסברים לעיל, ונוכיח לפי ההגדרה שזה אכן לא גזיר

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{|x(x+2)|}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{|x|}}{x}\cdot\underbrace{\sqrt{|x+2|}}_{\to\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{|x|}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=\infty$$

ב. מצאו ערך של הפרמטר $a\in\mathbb{R}$ עבורו הפונקציה גזירה בכל הממשיים, או הוכיחו שאין כזה.

אי אפשר לגרום לפרבולה הפנימית לרחף, אבל אפשר לגרם לה לנשק את הציר אם נגרום לשורשיה להיות שווים, כלומר

$$a^2=3a-2$$

נראה מה קורה במצב הזה.

$$a^2-3a+2=0$$

$$a_{1,2}=1,2$$

נציב למשל $a=1$

$$f(x)=\sqrt{(x-1)(x-1)}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$$

בטעות פתרנו את סעיף ג', ומצאנו ערך של a עבורו הנגזרת לעולם לא מתאפסת, ב1 זה לא גזיר ובשאר המקרים הנגזרת היא 1 או מינוס 1.

נדמה שתמיד הפונקציה לא תהיה גזירה בנקודה שמאפסת את הפרבולה.

נחשב את הנגזרת ב$x=a^2$ לפי ההגדרה

$$f'(a^2)=\lim_{x\to a^2}\frac{f(x)-f(a^2)}{x-a^2}=\lim_{x\to a^2}\frac{\sqrt{|(x-a^2)(x-3a+2)|}}{x-a^2}$$

נחשב את הגבול מימין בינתיים

$$\lim_{x\to a^2}\frac{1}{\sqrt{x-a^2}}\cdot\sqrt{|x-3a+2|}$$

אם $a \neq 1,2$ הביטוי הימני שואף למספר חיובי ולכן כל הסיפור שואף לאינסוף. והפונקציה אינה גזירה בנקודה

אם $a = 1$ קיבלנו $f(x) = |x - 1|$ שאינו גזיר בנק'

אם $a = 2$ נקבל $f(x) = |x - 4|$ שגם הוא, אינו גזיר בנקודה.

סה"כ לכל a הפונקציה אינה גזירה ב$x = a^2$

ג. מצאו ערך של הפרמטר $a \in \mathbb{R}$ עבורו <u>אין</u> נקודה בה $f'(x) = 0$, או הוכיחו שאין כזה.

ראו סעיף קודם.

4. תהי פונקציה f הגזירה בכל הממשיים, כך שלמשוואה $f(x) = 0$ יש בדיוק שני פתרונות.

א. הוכיחו/הפריכו: למשוואה $f'(x) = 0$ יש בדיוק פתרון אחד.

אכן לפי רול ברור שהנגזרת מתאפסת <u>לפחות</u> פעם אחת. האם <u>בדיוק</u> פעם אחת?

$$f(x) = x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$$

מתאפסת בדיוק פעמיים.

$$f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2)$$

מתאפסת גם פעמיים.

הפרכנו.

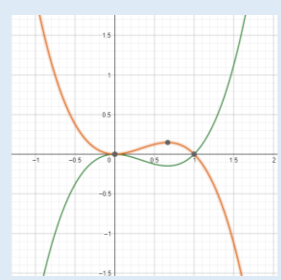
ב. הוכיחו/הפריכו: אם $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ אזי הפונקציה f חסומה מלעיל בממשיים.

הפרכה:

ניקח

$$f(x) = -(x^3 - x^2)$$

קל לוודא שהיא שואפת למינוס אינסוף מימין ולאינסוף משמאל ולכן אינה חסומה מלעיל



5. תהי סדרה המקיימת $a_{n+1} = a_n + \sqrt{|1 - a_n|}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

א. הוכיחו כי הסדרה מונוטונית עולה.

פתרון במועד הקודם שם הייתה אותה השאלה.

ב. לכל ערך של האיבר הראשון $a_1 \in \mathbb{R}$, מצאו את גבול הסדרה.

כנ"ל

6.

א. חשבו את גבול הסדרה

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2}{n^2 + k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} \to \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx = \arctan(x) \,|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

הגבול לעיל נכון כי לפי משפט סדרת סכומי הרימן בצורה הנתונה שואפת לאינטגרל שרשמנו כיוון ש $\frac{1}{1+x^2}$ רציפה ב$[0,1]$

ב. קרבו את $\cos(1)$ עד כדי שגיאה של $h = \frac{1}{100}$.

ננחש שפיתוח עד סדר 4 מספיק

$$R_4 = \frac{f^{(5)}(c)}{5!} (1 - 0)\text{^}5$$

$$|R_4| \leq \frac{1}{5!} < \frac{1}{100}$$

זה בגלל ש $\left|f^{(5)}(c)\right| \leq 1$ כי כל הנגזרות הן פלוס או מינוס קוסינוס או סינוס

$$P_4(\cos(x)\,, 0) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

סה"כ הקירוב שלנו הוא

$$\cos(1) \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24}$$