מתמטיקה מד"ר תשפג מועד ב

1. מצאו פתרון למד"ר $x^2y'+xy+1=0$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(1)=0$.

פתרון: אחרי חילוק ב x^2 והעברת אגף נקבל

$$y'+\frac{1}{x}y=-\frac{1}{x^2}$$

שהינה מד"ר לינארית מסדר ראשון מהצורה $y'+a(x)y=b(x)$ עבור $a(x)=\frac{1}{x}, b(x)=-\frac{1}{x^2}$. הפתרון שלה הוא

$$e^{-A(x)}\left(C+\int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

עבור $A(x)$ קדומה של $a(x)$. נחשב

$$A(x)=\int a(x)\mathrm{dx}=\int\frac{1}{x}\mathrm{dx}=\ln|x|$$

נציב ונקבל

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-\ln|x|}\left(C+\int -\frac{1}{x^2}e^{\ln|x|}\mathrm{dx}\right). \\ &= |x|^{-1}\left(C-\int\frac{1}{x^2}|x|\,\mathrm{dx}\right) \\ &= |x|^{-1}C-|x|^{-1}\int\frac{|x|}{x^2}\mathrm{dx} \end{aligned}$$

כעת: עבור $x>0$ נקבל

$$|x|^{-1}\int\frac{|x|}{x^2}\mathrm{dx}=x^{-1}\int\frac{x}{x^2}\mathrm{dx}$$

ועבור $x<0$ נקבל

$$|x|^{-1}\int\frac{|x|}{x^2}\mathrm{dx}=-x^{-1}\int\frac{-x}{x^2}\mathrm{dx}=x^{-1}\int\frac{x}{x^2}\mathrm{dx}$$

ולכן נוכל להמשיך עם $x^{-1}\int\frac{x}{x^2}\mathrm{dx}$. נמשיך:

$$\begin{aligned}y(x)&=|x|^{-1}C-|x|^{-1}\int\frac{|x|}{x^2}\mathrm{dx}\\&=|x|^{-1}C-x^{-1}\int\frac{x}{x^2}\mathrm{dx}\\&=|x|^{-1}C-x^{-1}\ln|x|\end{aligned}$$

ונציב תנאי התחלה $y(1)=0$.

$$0=y(1)=|1|^{-1}C-0=C$$

ולכן

$$y(x)=-x^{-1}\ln|x|.$$

2. מצאו פתרון למד"ר $\left(1-\frac{y}{x}\right)y'=1-\frac{y}{x}-\frac{e^x}{2x}$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(1)=0$.

פתרון: נחלק ב $\left(1-\frac{y}{x}\right)$ לקבל:

$$y'=1-\frac{e^x}{2x\left(1-\frac{y}{x}\right)}$$

$$y'=1-\frac{e^x}{2\left(x-y\right)}$$

נגדיר $z=x-y$ ואז $z'=1-y'$ ונציב:

$$1-z'=1-\frac{e^x}{2z}$$

$$\frac{e^x}{2z}=z'$$

$$e^x = 2zz'$$

ובצורה שקולה

$$e^x \mathrm{dx} = 2z\mathrm{dz}.$$

קיבלנו מד"ר פרידה. נעשה אינטגרל על שני האגפים, כל אחד לפי המשתנה שלו:

$$e^x + C = z^2$$

וקיבלנו

$$z = \pm\sqrt{e^x + C}$$

נחזור ל y:

$$y = x - z = x \pm \sqrt{e^x + C}.$$

נציב תנאי התחלה $y(1) = 0$

$$0 = y(1) = 1 \pm \sqrt{e + C}$$

$$\pm\sqrt{e + C} = -1$$

לכן צריך לקחת את הפתרון של המינוס. נמשיך לבודד את C

$$\sqrt{e + C} = 1$$

$$C = 1 - e$$

וסה"כ התשובה היא

$$y(x) = x - \sqrt{e^x + 1 - e}.$$

3. מצאו פתרון למד"ר $y'' - 2y' + y = xe^x$ המקיים $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

פתרון: נתחיל עם פתרון כללי למד"ר ההומוגנית $y'' - 2y' + y = 0$. הפולינום האופייני שלה

$$p(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

בעל שורש (כפול) 1 ולכן e^x, xe^x בסיס למרחב הפתרונות של ההומוגנית והפתרון הכללי למד"ר ההומגנית הוא

$$y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

נמצא פתרון פרטי למד"ר הלא הומגנית בעזרת שיטת הניחוש: כיוון ש $f(x) = xe^x$ שהוא פולינום מדרגה 1 שמוכפל ב e^x (שמתאים ל 1 שהוא שורש של הפולינום האופייני מריבוי 2), ננחש פתרון מהצורה $y_p = (\alpha_0 + \alpha_1 x) x^2 e^x$. מתקיים

$$\begin{aligned} y_p' &= \left((\alpha_0 + \alpha_1 x) x^2 + 2x(\alpha_0 + \alpha_1 x) + \alpha_1 x^2\right) e^x \\ &= \left((\alpha_0 + 3\alpha_1 + \alpha_1 x) x^2 + 2x\alpha_0\right) e^x \\ y_p'' &= \left((\alpha_0 + 3\alpha_1 + \alpha_1 x) x^2 + 2x\alpha_0 + 2\alpha_0 + 2x(\alpha_0 + 3\alpha_1 + \alpha_1 x) + \alpha_1 x^2\right) e^x \\ &= \left((\alpha_0 + 4\alpha_1 + \alpha_1 x) x^2 + 2x(2\alpha_0 + 3\alpha_1 + \alpha_1 x) + 2\alpha_0\right) e^x \end{aligned}$$

ונציב במד"ר

$$\begin{aligned} xe^x &= (\alpha_0 + \alpha_1 x) x^2 e^x - 2\left((\alpha_0 + 3\alpha_1 + \alpha_1 x) x^2 + 2x\alpha_0\right) e^x \\ &\quad + \left((\alpha_0 + 4\alpha_1 + \alpha_1 x) x^2 + 2x(2\alpha_0 + 3\alpha_1 + \alpha_1 x) + 2\alpha_0\right) e^x \\ &= [2\alpha_0 + 6\alpha_1 x] e^x \end{aligned}$$

ונקבל $2\alpha_0 = 0, 6\alpha_1 = 1$. מכאן ש $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = \frac{1}{6}$ והפתרון הפרטי הוא

$$y_p = \left(0 + \frac{1}{6}x\right) x^2 e^x = \frac{1}{6} x^3 e^x$$

והפתרון הכללי למד"ר הלא הומגנית הוא

$$y = y_p + y_h = \frac{1}{6} x^3 e^x + C_1 e^x + C_2 x e^x$$

ו

$$y' = \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right) e^x + C_1 e^x + C_2 (x+1) e^x$$

ונציב תנאי התחלה. נציב ונקבל

$$0 = y(0) = C_1$$

$$1 = y'(0) = C_1 + C_2$$

ולכן $C_1 = 0$ ו $C_2 = 1 - C_1 = 1$. לסיכום:

$$.y = \frac{1}{6}x^3e^x + xe^x$$

4. כדורגל בעל מסה של $m = 2\text{kg}$ נזרק כלפי מעלה מגובה של $y_0 = 10m$ ומגיע לקרקע לאחר 2 שניות. כמו כן נתון כוח התנגדות האוויר שווה בגודלו לחצי מגודל מהירות הכדור. לצורך הפשטות הניחו כי קבוע תאוצת הכובד של כדור הארץ הוא $g = 10$.

(א) מצאו את המהירות בה נזרק הכדור.

פתרון: נסמן מיקום הארץ ב 0 והכיוון כלפי מעלה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן t (בפרט $y(0) = 10$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg = 2 \cdot 10 = 20$ וכיוונו לכיוון השלילי (מטה). בנוסף פועל על הכדור התנגדות האוויר שהוא בגודל $\frac{1}{2}v$ וכיוונו הפוך מהכיוון של v לכן הכח מהתנגדות האוויר הוא $-\frac{1}{2}v$. לכן הכח הכולל הוא $-2g - \frac{1}{2}v$. מהשיוון $F = ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל כל הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-2g - \frac{1}{2}v = ma = 2a$$

או $-2g - \frac{1}{2}y'(t) = 2y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום ומהירות היא הנגזרת של המיקום). נסמן $z = y'$ ונחלק ב 2 ונקבל

$$z' + \frac{1}{4}z = -g$$

שזוהי מד"ר לינארית מהצורה $z' + a(x)z = b(x)$ (עבור $a(x) = \frac{1}{4}, b(x) = -g$) שפתרונה

$$e^{-A(x)}\left(C + \int b(x)e^{A(x)}\text{dx}\right)$$

כאשר $A(x)$ קדומה של $a(x)$. אצלנו נבחר $A(x) = \frac{1}{4}x$ ונציב

$$e^{-\frac{1}{4}x}\left(C - \int ge^{\frac{1}{4}x}\text{dx}\right) = e^{-\frac{1}{4}x}\left(C - 4ge^{\frac{1}{4}x}\right) = e^{-\frac{1}{4}x}C - 4g$$

לכן:

$$z(t) = e^{-\frac{1}{4}t}C - 4g$$

או

$$y'(t) = e^{-\frac{1}{4}t}C - 4g.$$

מכאן, ע"י אינטגרל פשוט, נקבל

$$y(t) = -4e^{-\frac{1}{4}t}C - 4gt + D.$$

כעת נציב נתוני השאלה. נתון כי $y(0) = 10$ ו $y(2) = 0$. נקבל את המשוואות

$$\begin{cases} 10 = y(0) = -4C + D \\ 0 = y(2) = -4e^{-\frac{1}{2}}C - 8g + D \end{cases}$$

ומהמשוואה הראשונה נקבל $D = 10 + 4C$. נציב במשוואה השניה

$$0 = -4e^{-\frac{1}{2}}C - 8g + D = -4e^{-\frac{1}{2}}C - 8g + 10 + 4C =$$

$$= \left(-4e^{-\frac{1}{2}} + 4\right) C - 70$$

לכן $C = \frac{70}{-4e^{-\frac{1}{2}}+4} = \frac{70}{4\left(1-e^{-\frac{1}{2}}\right)}$ ו $D = 10 + 4C = 10 + 4\left(\frac{70}{-4e^{-\frac{1}{2}}+4}\right) = 10 + \frac{70}{1-e^{-\frac{1}{2}}}$. נחזור ל y' ונציב את C שמצאנו

$$y'(t) = e^{-\frac{1}{4}t}\left(\frac{70}{4\left(1-e^{-\frac{1}{2}}\right)}\right) - 4g$$

ונקבל שהמהירות ההתחלתית היא

$$y'(0) = \left(\frac{70}{4\left(1-e^{-\frac{1}{2}}\right)}\right) - 4g.$$

(ב) מצאו את תאוצת הכדור ברגע הפגיעה בקרקע.

פתרון: בסעיף הקודם ראינו ש

$$y'(t) = e^{-\frac{1}{4}t}\left(\frac{70}{4\left(1-e^{-\frac{1}{2}}\right)}\right) - 4g$$

ולכן פונקציית התאוצה היא

$$.y''(t) = -\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}t}\left(\frac{70}{4\left(1-e^{-\frac{1}{2}}\right)}\right)$$

הכדור פוגע בקרקע לאחר 2 שניות ולכן התאוצה אז היא

$$y''(2) = -\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{70}{4\left(1-e^{-\frac{1}{2}}\right)}\right)$$

5. נסמן ב D את אופרטור הגזירה, וב I את אופרטור הזהות.

(א) עבור $S = D + I$ מצאו פתרון למד"ר $Sy = x$.

פתרון: המד"ר המבוקשת היא

$$y' + y = x$$

שהינה מד"ר לינארית מסדר ראשון מהצורה $y' + a(x)y = b(x)$ עבור $a(x) = 1, b(x) = x$. הפתרון שלה הוא

$$e^{-A(x)}\left(C + \int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

עבור $A(x)$ קדומה של $a(x)$. נבחר $A(x) = x$ ונציב

$$y(x) = e^{-x}\left(C + \int xe^{x}\mathrm{dx}\right)$$

נחשב את הקדומה של xe^x על ידי אינטגרציה בחלקים

$$\int xe^x\mathrm{dx} = \left\{\begin{array}{ccc} f = x & \Rightarrow & f' = 1 \\ g' = e^x & & g = e^x \end{array}\right\} = xe^x - \int e^x\mathrm{dx} = e^x(x-1)$$

ונקבל ש

$$y(x)=e^{-x}\left(C+\int xe^{x}\mathrm{dx}\right)=e^{-x}\left(C+e^{x}\left(x-1\right)\right)=e^{-x}C+\left(x-1\right)$$

ואם נציב $C=0$ נקבל כי $y(x)=x-1$ הוא פתרון פרטי למד"ר.

(ב) מצאו פתרון למד"ר $xy''+\left(x-1\right)y'-y=0$ המקיים $y(1)=0,y'(1)=1$. רמז: $T=\left(xD-I\right)\left(D+I\right)$

פתרון: נסמן את הפתרון כטור טיילור $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{k}x^{k}$ ואז

$$y'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}ka_{k}x^{k-1}$$

$$y''(x)=\sum_{k=2}^{\infty}k\left(k-1\right)a_{k}x^{k-2}$$

ונציב במד"ר

$$\begin{aligned}0&=xy''+\left(x-1\right)y'-y\\&=xy''+xy'-1y'-y\\&=\sum_{k=2}^{\infty}k\left(k-1\right)a_{k}x^{k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}ka_{k}x^{k}-\sum_{k=1}^{\infty}ka_{k}x^{k-1}-\sum_{k=0}^{\infty}a_{k}x^{k}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\left(k+1\right)ka_{k+1}x^{k}+\sum_{k=1}^{\infty}ka_{k}x^{k}-\sum_{k=0}^{\infty}\left(k+1\right)a_{k+1}x^{k}-\sum_{k=0}^{\infty}a_{k}x^{k}\\&=\left(-a_{1}-a_{0}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(k+1\right)ka_{k+1}+ka_{k}+\left(k+1\right)a_{k+1}+a_{k}\right]x^{k}\\&=\left(-a_{1}-a_{0}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(k+1\right)\left(k+1\right)a_{k+1}+\left(k+1\right)a_{k}\right]x^{k}\\&=\left(-a_{1}-a_{0}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(k+1\right)\left[\left(k+1\right)a_{k+1}+a_{k}\right]x^{k}\end{aligned}$$

ולכן $a_{1}=-a_{0}$ ולכל $k\geq1$ מתקיים $\left(k+1\right)\left[\left(k+1\right)a_{k+1}+a_{k}\right]=0$ או

$$a_{k+1}=-\frac{a_{k}}{\left(k+1\right)}$$

ולכן

$$a_2 = -\frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2}$$

$$a_3 = -\frac{a_2}{3} = -\frac{a_0}{3!}$$

$$a_4 = -\frac{a_3}{4} = \frac{a_0}{4!}$$

ואפשר להוכיח באינדוקציה כי $a_k = (-1)^k \frac{a_0}{k!}$ לכל $k \geq 1$. עבור $a_0 = 1$ נקבל את הטור

$$\begin{aligned} y(x) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} \\ &= e^{-x} \end{aligned}$$

וקל לוודא שאכן $y_2(x) = e^{-x}$ פתרון למד״ר. נשים לב שהצבה של a_0 אחר יתן לנו $a_0 e^{-x}$ ולכן לא נוכל לקבל עוד פתרון כך שיהיו לנו שני פתרונות בת״ל. ניעזר ברמז

$$(xD - I)(D + I) = xD^2 + xD - D - I$$

שמתאר את המד״ר שלנו. ראינו בסעיף קודם כי $y_1(x) = x - 1$ מקיים כי

$$(D + I) y_2 = x$$

כיוון ש $(xD - I)x = x - x = 0$ נקבל ש $(xD - I)(D + I) y_2 = 0$ ולכן גם y_2 פתרון למד״ר של הסעיף. נוכיח כי y_1, y_2 על ידי הורונסקיאן

$$\det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x - 1 & e^{-x} \\ 1 & -e^{-x} \end{pmatrix} = -e^{-x}(x - 1 + 1) = -xe^{-x}$$

שלא מתאפס עבור $x \neq 0$ ולכן סביב $x = 1$ (ששמה נתוני ההתחלה) y_1, y_2 בת״ל והם יהיו בסיס כי המד״ר הינו מד״ר לינארית הומוגנית מסדר 2. לכן הפתרון הכללי למד״ר הוא

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 (x - 1) + c_2 e^{-x}$$

ונציב בו תנאי התחלה.

$$0 = y(1) = c_2 e^{-1}$$

ולכן $c_2 = 0$. מכאן ש $y(x) = c_1 (x-1)$. נגזור $y'(x) = c_1$ ומתנאי ההתחלה

$$1 = y'(1) = c_1$$

נקבל שהפתרון של התרגיל הוא $y(x) = x - 1$.