הדיסקרימיננט

הגדרה

נניח $f \in F[\lambda]$ מתפצל ב$E[\lambda]$ עם פולינום $f = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - a_i)$. נגדיר $d := d_f = \prod_{i>j} (a_i - a_j)$.

הערה

אם τ חילוף - כלומר $\tau = (i,j)$ - אז $\tau(d) = -d$ כי $a_{i_1} - a_{j_1} \mapsto a_{j_1} - a_{i_1} = -(a_{i_1} - a_{j_1})$
לכן $d^2 \in F$, ו

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, no head] \\ F[d] \arrow[d, no head, "1 \text{ or } 2"'] \\ F \end{tikzcd}$$

מסקנה

לכל $\pi \in S_n$, $\pi(d) = (\mathrm{sgm}\ \pi)\, d$, לכן $d \in E^{A_n \cap G}$ כאשר $G = \mathrm{Gal}(E/F)$.
אותו נימוק $\Leftarrow$ $\mathrm{Gal}(E/F[d]) = A_n \cap G$.
לכן $\boxed{d \in F \iff G \subseteq A_n}$.

דוגמה

$$f = \lambda^2 + \alpha\lambda + \beta \qquad \mathrm{char}\ F \neq 2 \qquad n = 2$$

יש שני שורשים a_1, a_2. $d = a_1 - a_2$. יודעים $-\alpha = a_1 + a_2 \in F$.

$$d \in F \iff a_1, a_2 \in F$$

$d^2 \in F$ נקרא הdiscriminant.

הוכחנו: הdisc ריבועי בתוך F $\iff G \subseteq A_n$

שיטה 2

הגדרה

מטריצת Vandermonde: נגדיר $a_{ij}=a_i^{j-1}$, $V=(a_{ij})$.

$$\begin{pmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1}\end{pmatrix}=V=(a_{ij})$$

מתקיים

$$|V|=\prod_{i>j}(a_i-a_j)$$

הערה

ניקח a_1=שורש של f.

כל a_i הוא $\sigma_i(a_1)$ כאשר $G=\{\sigma_i|1\le i\le n\}$. ברור $a_i^j=\sigma_i\left(a_1^j\right)$, לכן $a_{ij}=\sigma_i\left(a_1^{j-1}\right)$.

$$\operatorname{disc} f=|U|^2=\left|V^tV\right|=\left|\left(\sum_i a_{ij}a_{ik}\right)\right|=$$

$$=\left|\left(\sum_i \sigma_i\left(a_1^{j-1}\right)\sigma_i\left(a_1^{k-1}\right)\right)\right|=\left|\left(\sum_i \sigma_i\left(a_1^{j+k-2}\right)\right)\right|=\left|\left(\mathrm{Tr}\left(a_1^{j+k-2}\right)\right)\right|$$

דוגמה

1.

$$f=\lambda^2+\alpha\lambda+\beta \qquad \mathrm{Tr}(a_1)=-\alpha$$

$$\mathrm{Tr}\left(a_1^2\right)=\alpha^2-2\beta$$

(כי אם $M=\begin{pmatrix}\mu & \\ & \nu\end{pmatrix}$, אז $\det M=\mu\nu$, $\mathrm{Tr}M=\mu+\nu$ ו-$\mathrm{Tr}M^2=\mu^2+\nu^2=(\mathrm{Tr}\mu)^2-2\det M$)

2. $f=\lambda^3+p\lambda+q$. תרגיל: $\begin{vmatrix}3 & 0 & ?\\ 0 & ? & ??\\ ? & ?? & ???\end{vmatrix}$

הדרך השלישית: Resuhant

הגדרה

מטריצת Sylvester $(m+n)\times n$ של פולינום $f=\sum\limits_{i=0}^{m}\alpha_i\lambda^i$ היא

$$A_f := \begin{pmatrix} \alpha_0 & \cdots & \alpha_m & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_0 & \cdots & \alpha_m & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_0 & \cdots & \alpha_m \end{pmatrix}$$

הגדרה

$$\operatorname{Res}(f,g)=\begin{pmatrix} A_f \\ A_g \end{pmatrix}$$

כאשר A_f, A_g מטריצות סילווסטר של f,g ו $\begin{matrix} A_f\in M_{(m+n)\times n} \\ A_g\in M_{(m+n)\times m}\end{matrix}$ עבור $\begin{matrix} m=\deg f \\ n=\deg g\end{matrix}$

$$(m+n)\times(m+n) \qquad \begin{pmatrix} \alpha_0 & \cdots & \alpha_m & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_0 & \cdots & \alpha_m & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_0 & \cdots & \alpha_m \\ \beta_0 & \cdots & \beta_m & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_0 & \cdots & \beta_m & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \beta_0 & \cdots & \beta_m \end{pmatrix}$$

חשוב מאוד:

$$|\operatorname{Res}(f,g)|$$

משפט

$$|\mathrm{Res}\,(f,g)| =$$

$$= \prod (b_j - a_i) = \prod f\,(b_j) = (-1)^{mn}\,g\,(a_i)$$

כאשר $a_1,\dots a_m$ השורשים של f ו$b_1,\dots b_n$ השורשים של g.

לכן

$$f = \prod (\lambda - a_i) \qquad f' = \sum_i \prod_{j\neq i} (\lambda - a_j)$$

$$|\mathrm{Res}\,(f,f')| = \prod_i f'\,(a_i) = \prod_{j\neq i} (a_i - a_j) = \mathrm{disc}$$

$$a^n - b^n = \prod_{i=1}^{n} \left(a - p^i b\right)$$

למשל

$$f = \lambda^3 + p\lambda + q \qquad f' = 3\lambda^2 + p$$

$$\begin{vmatrix} q & p & 0 & 1 & \\ & q & p & 0 & 1 \\ p & 0 & 3 & & \\ & p & 0 & 3 & \\ & & p & 0 & 3 \end{vmatrix} = 27q^2 - p^3 - 3p^3 + p^3 - 9p^3 = 27q^2 - 4p^3$$

הוכחת המשפט

$$|\mathrm{Res}\,(f,g)| = \prod (b_j - a_i)$$

ועוד

$$(\beta_0,\dots\beta_n)\,A_n\,(f) = (\gamma_0,\dots\gamma_{m+n-1})$$

כאשר

$$pf = \sum_{i=0}^{m+n-1} \gamma_i \lambda^i$$

טענה: קיימים p,q עם $\begin{matrix}\deg p\le n-1\\ \deg q\le m-1\end{matrix}$ כך ש$pf+qg=|\mathrm{Res}\,(f,g)|$.

הוכחה: נגדיר $A=\mathrm{Res}\,(f,g)$. $\mathrm{adj}\,(A)\,A=|A|\,I$. לכן מקבלים הוקטור(מ$pf+qg$) $|A|\,,0,\ldots 0 \iff$ פולינום

$$|A|+0\lambda+0\lambda^2+\cdots+0\lambda^{n-1}=|A|$$

מסקנה: $|\mathrm{Res}\,(f,g)|=0 \iff f,g$ אינם זרים. $\Longleftarrow$

$$\Longrightarrow\ |\mathrm{Res}\,(f,g)|=0 \implies fp+gq=0$$

$fp=-gq$ אי אפשר כאשר f,g זרים.

אם f,g אינם זרים נכתוב $\begin{matrix}f=hf_1\\ g=hg_2\end{matrix}$ ואז

$$\underbrace{\overbrace{g_2}^{p}}_{\deg<n} f-\underbrace{\overbrace{f_1}^{q}}_{\deg<m} g=0$$

נוכיח בסוף:

$$|\mathrm{Res}\,(f,g)|=\prod (b_j-a_i)$$

שיטת המשתנים: הצבה $a_i\mapsto b_j$ נותנת מחלק משותף בין f וg (כלומר $\lambda-a_i=\lambda-b_j$)
ולכן $\mathrm{Res}\,(f,g)\to 0 \Longleftarrow |\mathrm{Res}\,(f,g)|\mid \forall_{i,j} b_j-a_i$, ולכן

$$\prod (b_j-a_i)\mid |\mathrm{Res}\,(f,g)|$$

כאשר חושבים על a_i,b_j כמשתנים.
לפי הדרגות $|\mathrm{Res}\,(f,g)|$ הוא כפולה סקלרית של $\prod (b_j-a_i)$, וצריך לבדוק את המקדם של האלכסון:

$$\begin{pmatrix}
\alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & & & \\
 & \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & & & \\
 & & \ddots & & & & \\
 & & & \alpha_0 & & & \\
\beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n & & \\
 & \beta_0 & \beta_1 & \cdots & & \ddots & \\
 & & \ddots & & & & \ddots \\
 & & & \beta_0 & \cdots & & \beta_n
\end{pmatrix}$$

והמקדם של האלכסון הוא $\alpha_0^n\beta_0^n$