

אנליזה מודרנית תש"ף - תרגיל 1

להגשה עד 13.11.19

שאלה 1

לכל קבוצה $E \subseteq \mathbb{R}$ ו- $a, b \in \mathbb{R}$ נגדיר את הקבוצה $aE + b = \{ax + b | x \in E\}$. הוכיחו כי

$$m^*(aE + b) = |a|m^*(E)$$

שאלה 2

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה. הוכיחו או הפריכו:

1. אם A חסומה אז $m^*(A) < \infty$.

2. אם $m^*(A) < \infty$ אז A חסומה.

שאלה 3

נאמר שקבוצה $S \subseteq \mathbb{R}$ היא מטיפוס G_δ אם ניתן להציג אותה כחיתוך בן-מניה של קבוצות פתוחות. תהי $E \subseteq \mathbb{R}$. הוכיחו שקיימת קבוצה $S \in G_\delta$ עבורה מתקיים: $E \subseteq S$, וכן $m^*(S) = m^*(E)$.

הזרקה: השתמשו בהגדרה של מידה חיצונית והוכיחו שלכל קבוצה $E \subseteq \mathbb{R}$ ולכל $\varepsilon > 0$, קיימת קבוצה פתוחה O המקיימת $m^*(O) < m^*(E) + \varepsilon$. לאחר מכן בנו סדרה של קבוצות פתוחות מתאימות כאלו, וחיתכו אותן.

שאלה 4 (רשות)

תהא $E \subset \mathbb{R}$ המקיימת $0 < m^*(E) < \infty$. הוכיחו כי לכל $\varepsilon \in (0, 1)$ קיים קטע פתוח $I \subset \mathbb{R}$ כך ש: $m^*(E \cap I) \geq \varepsilon m^*(I)$.