2008, מועד א', שאלה 1

נתונה הפונקציה $f\left(x,y\right)=\ln\left(x+3y^{2}+2\right)$, $x,y>0$

א. למצוא את Δf כאשר $x=y=3$ ו$\Delta x=\Delta y=0.1$.

השגיאה המתפשטת בf חסומה ע"י $\Delta f=\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{x+3y^{2}+2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{6y}{x+3y^{2}+2}$$

$$\Delta f\left(x,y\right)=\left|\frac{1}{3+27+2}\right|0.1+\left|\frac{18}{3+27+2}\right|0.1\approx0.05937$$

ב. $y=3$(קבוע). חשב את $\Delta f\left(x\right)$ ע"פ מספר המצב

תזכורת: $C=\left|\frac{\delta f(x)}{\delta x}\right|=\cdots=\left|\frac{f'(x)\cdot x}{f(x)}\right|$

$$C_{x}=\left|\frac{\frac{x}{x+3y^{2}+2}}{\ln\left(x+3y^{2}+2\right)}\right|\approx0.0271$$

$$C_{x}=\left|\frac{\delta f\left(x\right)}{\delta x}\right|=\left|\frac{\frac{\Delta f(x)}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}}\right|$$

$$\delta f\left(x\right)=C_{x}\cdot\left|\delta x\right|\cdot\left|f\left(x\right)\right|\approx3.151\cdot10^{-3}$$

ג. אותו דבר, אבל הפעם $x=3$ קבוע

$$\Delta f\left(y\right)=0.05625$$

ד. מהו הקשר בין התוצאות?

סכום השגיאות של כל משתנה הוא השגיאה המוחלטת של הפונקציה.

2009, מועד ב', שאלה 1

צריך לחשב את $\sqrt{\frac{7}{8}}$ עם הפונקציות

$$f_1\left(x\right)=\sqrt{x}\qquad f_2\left(x\right)=\sqrt[4]{x}\qquad f_3\left(x\right)\sqrt{x-1}\qquad f_4\left(x\right)=\sqrt{\frac{x-1}{x}}$$

א. איך מחשבים עם כל פונקציה?

$$f_1\left(\frac{7}{8}\right)\qquad f_2\left(\frac{49}{64}\right)\qquad f_3\left(\frac{15}{8}\right)\qquad f_4\left(8\right)$$

ב. בהתחשב בשגיאה בקלט בלבד, איזו פונקציה הכי מדוייקת? איזו הכי פחות מדוייקת?

נחשב מספרי מצב:

$$C_1=\left|\frac{\frac{x}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right|=\frac{1}{2}$$

$$C_2=\left|\frac{\frac{x}{4\sqrt[4]{x^3}}}{\sqrt[4]{x}}\right|=\left|\frac{x}{4x}\right|=\frac{1}{4}$$

$$C_3=\left|\frac{\frac{x}{2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}}\right|=\left|\frac{x}{2\left(x-1\right)}\right|=\frac{15}{14}\approx1.072$$

$$C_4=\left|\frac{\frac{\frac{1}{x^2}\cdot x}{2\sqrt{\frac{x-1}{x}}}}{\sqrt{\frac{x-1}{x}}}\right|=\left|\frac{1}{2\left(x-1\right)}\right|=\frac{1}{14}\approx0.07143$$

לכן הפונקציה הכי טובה היא הרביעית, והכי גרועה היא השלישית.

2008, מועד א', שאלה 2

$$f\left(x\right)=x^5-6x^4+5x^3$$

א. מצאו באופן אנליטי את שורשי הפונקציה

$$x^3\left(x^2-6x+5\right)=0$$

$$x^3\left(x-5\right)\left(x-1\right)=0$$

$$x=0,1,5$$

ב. מהי איטרציית ניוטון־רפסון לחישוב שורשי הפונקציה הנתונה באופן נומרי?

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right)}$$

$$g\left(x\right)=x-\frac{x^5-6x^4+5x^3}{5x^4-24x^3}=\frac{4x^3-18x^2+10x}{5x^2-24x+15}$$

ג. חשבו עד 7 איטרציות עבור $x_0=0.8$ **ועבור** $x_0=0.7$

$x_0=0.7$	$x_0=0.8$
-0.6892	1.472
-0.4939	1.2138
-0.3495	1.0686
-0.2444	1.0102
-0.1690	1
-0.1158	
-0.0788	

מצאנו שורשים שונים בגלל שיש נקודת קיצון ב$[0.7,0.8]$, מה שהופך את כיוון הירידה של המשיק.

ד. האם ההתכנסויות בסעיף הקודם מתכנסות באותו הקצב?

לא ־ $x_0=0.8$ מתכנס(ל1) יותר מהר מאשר $x_0=0.7$(ל0). זה מתאים לכך שסדר ההתכנסות של ניוטון רפסון ריבועי עבור שורש פשוט(כמו 1), וגרוע עבור שורש מסדר יותר גבוה(כמו 0, שהוא מסדר 3)

מבחן 2008, מועד א' שאלה 3

$$\left\{\begin{array}{c}6x_1+2x_2+2x_3=2\\2x_1+\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3=1\\x_1+2x_2-x_3=0\end{array}\right.\qquad\vec{x}=\begin{bmatrix}2.6\\-3.8\\-5.0\end{bmatrix}$$

א. אלימינציה

$$\begin{bmatrix}6 & 2 & 2 & -2\\ 2 & 0.6667 & 0.3333 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow[m_{31}=0.1667]{m_{21}=0.3333} \begin{bmatrix}6 & 2 & 2 & -2\\ 0 & 0.0001 & -0.3333 & 1.667\\ 0 & 1.667 & -1.333 & 0.3334\end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{0.6667-0.3333\cdot 2} \begin{bmatrix}6 & 2 & 2 & -2\\ 0 & 0.0001 & -0.3333 & 1.667\\ 0 & 0 & 5555 & -27,790\end{bmatrix}$$

$$x_3 = -5.003 \qquad x_2 = 0 \qquad x_1 = 1.334$$

ב. שחלוף שורות

$$\begin{bmatrix}6 & 2 & 2 & -2\\ 2 & 0.6667 & 0.3333 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow[m_{31}=0.1667]{m_{21}=0.3333} \begin{bmatrix}6 & 2 & 2 & -2\\ 0 & 0.0001 & -0.3333 & 1.667\\ 0 & 1.667 & -1.333 & 0.3334\end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix}6 & 2 & 2 & -2\\ 0 & 1.667 & -1.333 & 0.3334\\ 0 & 0.0001 & -0.3333 & 1.667\end{bmatrix} \xrightarrow{m_{32}=5.999\cdot 10^{-5}} \begin{bmatrix}6 & 2 & 2 & -2\\ 0 & 1.667 & -1.333 & 0.3334\\ 0 & 0 & -0.3332 & 1.667\end{bmatrix}$$

$$x_3 = -5.003 \qquad x_2 = -3.801 \qquad x_1 = 2.602$$

2009 מועד ב' שאלה 4

עבור נקודות $x_0, x_1, \ldots x_n$, יש אינטרפולציה $p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j e^{jx}$.

א. צריך להוכיח שc_j יחידים

$$t = e^x \Rightarrow \sum_{j=0}^{n} c_j t^j$$

ב. לפתור עבור הנקודות $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$, $f(x) = e^x$

$$\begin{bmatrix}1 & e^{x_0} & e^{2x_0}\\ 1 & e^{x_1} & e^{2x_1}\\ 1 & e^{x_2} & e^{2x_2}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}c_0\\ c_1\\ c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ e\\ e^2\end{bmatrix}$$

פותרים ומקבלים

$$p(x) = e^x$$

2009 מועד א' שאלה 4

סעיף א

- לגרנג':

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) y_i$$

- ניוטון:

$$\phi_i(x) = \prod_{j<i} x - x_j$$

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \phi(x)$$

$$a_i = f[x_0, \ldots x_i]$$

סעיף ב

- לגרנג' - $O(n^2)$
- ניוטון:

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = O(n^2)$$

סעיף ג

האבלואציה של ניוטון יותר מהירה, כי אפשר לחשב כל ϕ בנוסחת נסיגה ע"י $\phi_{i+1} = (x - x_i)\phi_i$

2008 מועד א' שאלה 5

$f(x)=\cos x$, לבצע על $[0,\pi]$ אפרוקסימציה ממעלה 2

א. לפי טור טיילור

$$p_2(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!}$$

$$f'(x)=-\sin x$$

$$f''(x)=-\cos x$$

$$f'''(x)=\sin x$$

$$p_2(x)=1-\frac{x^2}{2}$$

הערה: אמנם בשביל לחשב את השגיאה מספיק למצוא את השארית R_3, אבל מכיוון שהנגזרת השלישית בטור מתאפסת ב$x_0=0$, R_4 יהיה תשובה יותר מדויקת.

$$R_3(x)\le\left|f^{(3)}(\xi)\frac{x^3}{3!}\right|\qquad \xi\in[0,\pi]$$

$$\xi=\frac{\pi}{2},x=\pi\Rightarrow R_3(x)\le\frac{\pi^3}{3!}$$

ב. באמצעות מזעור הפרשים

$$\begin{bmatrix}\int_0^\pi 1\,\mathrm{d}x & \int_0^\pi x\,\mathrm{d}x & \int_0^\pi x^2\,\mathrm{d}x\\ \int_0^\pi x\,\mathrm{d}x & \int_0^\pi x^2\,\mathrm{d}x & \int_0^\pi x^3\,\mathrm{d}x\\ \int_0^\pi x^2\,\mathrm{d}x & \int_0^\pi x^3\,\mathrm{d}x & \int_0^\pi x^4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_0\\ b_1\\ b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\int_0^\pi \cos x\\ \int_0^\pi x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x\\ \int_0^\pi x^2\cos x\,\mathrm{d}x\end{bmatrix}$$

והשגיאה היא

$$E(0)=-0.216$$

$$E(x=0.8851)=0.1023$$

$$E(x=2.256)=-0.1027$$

$$E(\pi)=0.2156$$