

תרגיל בית 9 במבנים אלגבריים

89-214 סמסטר א' תשע"ז

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום בכל דף שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא בתרגול בשבוע המתחיל בתאריך כ"ד טבת ה'תשע"ז, 29.1.2017

שאלות להגשה

שאלה 1. בכל סעיף נתונה חבורה G ותת-חבורה $H \leq G$. הוכיחו כי $H \triangleleft G$ וחשבו את G/H על ידי משפט האיזומורפיזם הראשון:

א. $H = \langle \sigma^2, \tau \rangle, G = D_6$.

ב. $H = (2\mathbb{Z}_4) \times (3\mathbb{Z}), G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}$.

נצטט את משפטי האיזומורפיזם השני והשלישי, ואז נוכיח אותם (לא לדאוג – יש הדרכה).

משפט (משפט האיזומורפיזם השני). תהי G חבורה, תהי $H \leq G$ תת-חבורה, ותהי $N \triangleleft G$ תת-חבורה נורמלית. אזי $H \cap N \triangleleft H$, $H \cap N \triangleleft HN$, וכן

$$HN/N \cong H/H \cap N$$

משפט (משפט האיזומורפיזם השלישי). תהי G חבורה, ותהינה $H, K \triangleleft G$ תת-חבורות נורמליות של G כך ש- $K \subseteq H$. אזי

$$G/K/H/K \cong G/H$$

שאלה 2. הוכיחו את משפט האיזומורפיזם השני: יהיו H, G ו- N כמו בניסוח המשפט. נגדיר $f: H \rightarrow HN/N$ לפי $f(h) = hN$.

א. הראו ש- f הומומורפיזם.

ב. הראו ש- f על.

ג. הוכיחו כי $\ker f = H \cap N$.

ד. הסיקו את הדרוש לפי משפט האיזומורפיזם הראשון.

שאלה 3. נסתכל על החבורה S_4 . נגדיר $K_4 = \{\text{id}, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\}$ תת-חבורה זו נקראת **תת-חבורת קליין**.

א. הוכיחו כי $K_4 \triangleleft S_4$.

ב. מצאו סדרה של תת-חבורות $G_n = \{\text{id}\} \triangleleft G_{n-1} \triangleleft \dots \triangleleft G_1 \triangleleft G_0 = S_4$, כך שלכל $i, G_{i+1} \triangleleft G_i$, וגם לכל i המנה G_i/G_{i+1} היא חבורה ציקלית. (רמז: היעזרו בסעיף הקודם ובתת-חבורה מוכרת).

שאלה 4. הוכיחו את משפט האיזומורפיזם השלישי: יהיו H, G ו- K כמו בניסוח המשפט. נגדיר $f: G/K \rightarrow G/H$ לפי $f(gK) = gH$.

א. הוכיחו ש- f מוגדרת היטב. כלומר, אם $g_1K = g_2K$, אזי $f(g_1K) = f(g_2K)$.

ב. הראו ש- f הומומורפיזם.

ג. הראו ש- f על.

ד. הוכיחו כי $\ker f = H/K$.

ה. הסיקו את הדרוש לפי משפט האיזומורפיזם הראשון.

שאלה 5. תהי G חבורה ותהיינה H, K תת-חבורות נורמליות המקיימות: $H \cap K = \{e\}$. הוכיחו כי G איזומורפית לתת-חבורה של $G/K \times G/H$.

שאלות רשות

שאלה 6. תהי G חבורה ותהי $K \triangleleft G$ המקיימת $G/K \cong \mathbb{Z}$. הוכיחו שלכל n טבעי קיימת תת-חבורה של G מסדר n .

שאלה 7. חבורה G נקראת **מטא-אבלית** אם יש לה תת-חבורה נורמלית N כך שגם N וגם G/N אבליות. הוכיחו שכל תת-חבורה של חבורה מטא-אבלית היא גם מטא-אבלית. רמז: נסו להשתמש באחד ממשפטי האיזומורפיזם.

בהצלחה!