תרגיל 1 מופשטת 3

בכל התרגיל אתם מתבקשים לנמק את צעדיכם ככל האפשר.

1. האם הפולינומים הבאים אי פריקים:

   (א) $3x^2 - 7x - 5$ ב $\mathbb{Q}[x]$.

   (ב) $x^3 - 7x + 2$ ב $\mathbb{Q}[x]$.

   (ג) $x^3 - 7x + 2$ ב $\mathbb{Z}_5[x]$.

   (ד) $x^3 - 6x - 9$ ב $\mathbb{Q}[x]$.

   (ה) $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 2x + 1$ ב $\mathbb{Q}[x]$.

2. מצאו את הפירוק של הפולינום $x^4 - 2$ מעל השדות הבאים:

   (א) $\mathbb{C}$.

   (ב) $\mathbb{R}$.

   (ג) $\mathbb{Q}$.

   (ד) $\mathbb{Z}_3$.

3. יהי $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ פולינום עם מקדמים שלמים. נניח כי a_n, $f(0)$ ו $f(1)$ הם אי זוגיים. הוכיחו כי ל f אין שורשים ב $\mathbb{Q}$.

4. יהי $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ויהי p מספר ראשוני. נסמן ב $\psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$ את ההומומורפיזם ששולח מספר למודולו שלו. את ψ אפשר להרחיב ל

$$\psi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_p[x]$$

   לפונקציה שפועלת על פולינומים (פשוט עושים מודולו לכל מקדם) כך שההרחבה היא עדיין הומומורפיזם. נניח ש $\deg \psi(f(x)) = \deg f(x)$ ו $\psi(f(x))$ אי פריק, הוכיחו כי $f(x)$ אי פריק.
   הדרכה: נניח בשלילה ש $f(x) = g(x)h(x)$ הוא פירוק לפונקציות לא הפיכות. שימו לב ש:

$$\psi(f(x)) = \psi(g(x))\psi(h(x))$$

   עכשיו שימו לב שמשהו בדרגות של הפולינומים לא מסתדר.