תרגול 12 - עוצמות

17 באוגוסט 2020

1. אם $|A| \geq \aleph_0$ אז $|A| = |A| + \aleph_0$ (מסקנה $|\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}| = \aleph$ בלי אקסיומת הבחירה).
פתרון: נתחיל מהעובדה שמהנתון ישנה $f : \mathbb{N} \to A$ חח"ע. כיון שסכום זה איחוד של נציגות זרות נתייחס לצד שמאל כ $|(A \times \{0\}) \cup \mathbb{N}|$. (כעת ברור ש- $|A| \leq |(A \times \{0\}) \cup \mathbb{N}|$, למשל ע"י הפונקציה $h : A \to (A \times \{0\}) \cup \mathbb{N}$ המוגדרת $h(a) = (a, 0)$ שחח"ע).
נגדיר פונקציה $g : (A \times \{0\}) \cup \mathbb{N} \to A$

$$g(x) = \begin{cases} f(2n) & x = (a,0) \wedge \exists! n : f(n) = a (a \in Im(f)) \\ f(2n-1) & x \in \mathbb{N} \\ a & x = (a,0) \wedge a \notin Im(f) \end{cases}$$

g חח"ע: נניח $g(x) = g(y)$. נחלק למקרים:

(א) אם $g(x) = g(y) \in f[2\mathbb{N}]$ אז $x = (a,0) \wedge a \in Im(f), y = (a',0) \wedge a' \in Im(f)$, נסמן $f(n) = a, f(n') = a'$, נקבל מהגדרת הפונקציה g:

$$f(2n) = g(x) = g(y) = f(2n')$$

מחח"ע של f נקבל $n = n'$, ומכאן: $a = f(n) = f(n') = a'$, ולכן $x = (a,0) = (a',0) = y$.

(ב) אם $g(x) = g(y) \in f[2\mathbb{N} - 1]$ אז $x = n, y = n'$, נסמן $f(n) = a, f(n') = a'$, נקבל מהגדרת הפונקציה g:

$$f(2n-1) = g(x) = g(y) = f(2n'-1)$$

מחח"ע של f נקבל $n = n'$, ומכאן: $x = n = n' = y$.

(ג) אם $g(x) = g(y) \notin Im(f)$, מהגדרת g נקבל $x = (a,0) \wedge a \notin Im(f), y = (a',0) \wedge a' \notin Im(f)$, ומהגדרת g נקבל:

$$a = g(x) = g(y) = a'$$

ולכן

$$x=(a,0)=(a',0)=y$$

g על: יהי $a\in A$. שוב נחלק למקרים:

i. אם $a\in f[2\mathbb{N}]$ אז קיים $2n$ כך ש־ $f(2n)=a$, ולכן נקבל:

$$g((f(n),0)=f(2n)=a$$

ii. אם $a\in f[2\mathbb{N}-1]$ אז קיים $2n-1$ כך ש־ $f(2n-1)=a$ ואז:

$$g(n)=f(2n-1)=a$$

iii. אם $a\notin Im(f)$ אז:

$$g((a,0))=a$$

2. תהיינה $\{A_i\}_{i\in I}$ אוסף קבוצות לא ריקות שעוצמת כל אחת לא עולה על a (כלומר לכל $i\in I$ מתקיים כי $|A_i|\le a$).

(א) הוכיחו כי $|\cup_{i\in I}A_i|\le a\cdot|I|$

פתרון: ניקח נציגה A כך ש־ $a=|A|$. לכל $i\in I$ ישנה $f_i:A\to A_i$ על. נגדיר פונקציה $f:A\times I\to\underset{i\in I}{\cup}A_i$ ע"י:

$$f(x,i)=f_i(x)$$

טענה: f על. הוכחה: יהי $y\in\underset{i\in I}{\cup}A_i$, לכן קיים i כך ש־ $y\in A_i$. f_i על, ולכן יש $x\in A$ כך ש־ $f_i(x)=y$, ולכן:

$$f(x,i)=f_i(x)=y$$

כלומר, (x,i) המקור של y.

(ב) הוכיחו/הפריכו: אם לכל $i\in I$ מתקיים כי $|A_i|=a$ אז $|\cup_{i\in I}A_i|=a\cdot|I|$.

פתרון: הפרכה: ניקח $I=\mathbb{N}$, וניקח $a=1$ ולכל $i\in I$ נגדיר $A_i=\{1\}$, אז נקבל $\underset{i\in I}{\cup}A_i=\{1\}$ וכמבן $|\{1\}|\neq 1\cdot|I|$.

אפשר לפתור גם עם a אינסופית, ע"י לקחת נציגה $A, |A| = a$, וניקח $I = P(A)$, ולכל $i \in I$ נגדיר $A_i = A$, ונקבל:

$$\bigcup_{i\in I} A_i = A \Rightarrow |\cup_{i\in I} A_i| = a \neq a \times 2^a = a \cdot |I|$$

3. נגדיר $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ קבוצת כל הסדרות הבינאריות. נגדיר יחס $\sim$ על X כך $f \sim g$ אמ"מ הקבוצה $\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \neq g(n)\}$ סופית.

(א) הוכיחו כי $\sim$ יח"ש.

פתרון: רפל': תהי $f \in X$ נקבל $\{n : f(n) \neq f(n)\} = \emptyset$ ובפרט סופית.
סימטריות: נניח $f \sim g$ אז מהעובדה: $\{n : f(n) \neq g(n)\} = \{n : g(n) \neq f(n)\}$ נקבל $g \sim f$.
טרנ': נניח $f \sim g \sim h$, אז $M = \{n : f(n) \neq g(n)\}, N = \{n : g(n) \neq h(n)\}$. וידוע $|M|, |N| < \aleph_0$ (כלומר, סופית). נשים לב שאם $n \notin M \cup N$ אז

$$f(n) \underset{n\notin M}{=} g(n) \underset{n\notin N}{=} h(n)$$

ומכאן:

$$\{n : f(n) \neq h(n)\} \subseteq M \cup N$$

ולכן היא סופית.

(ב) לכל $f \in X$, מצאו את העוצמה של $[f]$. אם $f = (0,0,0,\dots)$ אז

$$[f] = \{g \in X : |\{n : g(n) = 1\}| < \aleph_0\}$$

ניזכר שראינו שהקבוצה $Y = \{B \in P(\mathbb{N}) : |B| < \aleph_0\}$ מקיימת $|Y| = \aleph_0$.
נגדיר פונקציה $F : [f] \to Y$ ע"י

$$F(g) = \{n : f(n) \neq g(n)\}$$

F מוגדרת היטב כי לפי הגדרת $\sim$ מתקיים $|\{n : f(n) \neq g(n)\}| < \aleph_0$.
F חח"ע כי אם $g \neq h \in [f]$, אז יש n כך ש־ $g(n) \neq h(n)$. נקבל

$$(f(n) = g(n) \wedge f(n) \neq h(n)) \vee (f(n) = h(n) \wedge f(n) \neq g(n))$$

ולכן

$$n \in F(h) \setminus F(g) \vee n \in F(g) \setminus F(h)$$

בכל מקרה $F(g) \neq F(h)$.

F על: תהי $B \in P(\mathbb{N})$ סופית. נגדיר $g : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ ע"י:

$$g(n) = \begin{cases} 1 - f(n) & n \in B \\ f(n) & n \notin B \end{cases}$$

נקבל:

$$F(g) = \{n : f(n) \neq g(n)\} = B$$

ולכן g המקור ל־B ו־F על.

בסה"כ $|[f]| = \aleph_0$.

(ג) מצאו את העוצמה של קבוצת המנה.

פתרון: נניח בשלילה $|{}^{X}/_{\sim}| = a < 2^{\aleph_0}$. נקבל $\bigcup_{[f] \in {}^{X}/_{\sim}} [f] = X$, כעת, $|X| = 2^{\aleph_0}$, ואילו $\left| \bigcup_{[f] \in {}^{X}/_{\sim}} [f] \right| \underset{*}{=} \aleph_0 \cdot a < 2^{\aleph_0}$ (השיוויון $*$ נובע מכך שהאיחוד זר), בסתירה. לכן $|{}^{X}/_{\sim}| = 2^{\aleph_0}$.

4. תהא X קבוצה אינסופית.

(א) הוכיחו שקיימות A, B תתי קבוצות של A זרות שוות עוצמה ל X כך ש $X = A \cup B$

(ב) הוכיחו שלכל $x_1 \neq x_2$ ב X קיימות A, B תתי קבוצות של X זרות שוות עוצמה ל X כך ש $X = A \cup B$ ובנוסף: $x_1 \in A, x_2 \in B$.

5. תרגיל על עקרון המקסימום של האוסדורף: קבוצה $X \subseteq \mathbb{R}$ תיקרא מגניבה אם:

$$\forall x, y \in X : x \neq y \Rightarrow x - y \notin \mathbb{Q}$$

הוכיחו שקיימת קבוצה מגניבה מקסימלית (ביחס להכלה).

6. נגדיר X להיות קבוצות כל יחסי השקילות R על הטבעיים כך ש $|{}^{\mathbb{N}}/_{R}| = 2$. בסימונים:

$$X = \{R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |{}^{\mathbb{N}}/_{R}| = 2\}$$

מצאו את $|X|$.

7. תהא $A = \left\{ f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \forall n\, f(n) < f(n+1) \right\}$ (קבוצת הסדרות העולות ממש) הוכיחו כי $|A| = \left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right|$.