+ פתרונות לחלק מהשאלות

בס"ד   י"ד בתמוז התשע"ח (27.6.18 למניינם)

<u>אלגברה לינארית להרחבת הסמכה – אוני' בן גוריון</u>

מועד א'

ד"ר מיטל (אליהו) רובינסון.

מתרגל: ניקול בלשוב

זמן הבחינה : 3 שעות תכננו את הזמן כהלכה!!

מותר להשתמש במחשבונים מדעיים פשוטים בלבד.
ניתן לצבור בבחינה 110 נקודות אולם הציון הסופי לא יעלה על 100.

בסוף הבחינה יש דפים נוספים לשימושכם.

הערה: כל המרחבים הוקטוריים בבחינה הם ממימד סופי.

בהצלחה!

שאלה	ניקוד
הוכחות :שאלות 1-2	
3	
4	
5	
סה"כ	

<u>חלק א' – הוכחות (20)</u>

ענו על אחת מהשאלות הבאות :

1. הוכיחו : $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ הפיכה משמאל/מימין אזי A הפיכה.

2. הוכיחו את **שני** המשפטונים :

א. משפטון ההחלפה של שטייניץ.
ב. בת"ל מקסימלית היא בסיס , פורשת מינימלית היא בסיס.

חלק ב - יש לענות על כל השאלות:

3. אין קשר בין הסעיפים (15 נק')

א. פתרו את המשוואה $|z+3i| = 3|z|$ (z מספר מרוכב).

ב. נתונה המערכת הבאה :
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 & 2+a \\ a & 3a & 1 & 2-t \end{array}\right)$$

עבור אילו ערכי a ו t קיים למערכת ?

i. פתרון יחיד,

ii. אינסוף פתרונות

iii. אין פתרון.

iv. במקרה של אינסוף פתרונות מצאו את הפתרון הכללי.

א.

$$|z+3i| = 3|z|$$

$$z = a+bi \in \mathbb{C} \qquad |z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$|a+bi+3i| = 3|a+bi|$$

$$\sqrt{a^2+(b+3)^2} = 3\sqrt{a^2+b^2}$$

$$a^2+(b+3)^2 = 9(a^2+b^2)$$

$$a^2+b^2-\frac{3}{4}b-\frac{9}{8} = 0$$

$$a^2+\left(b-\frac{3}{8}\right)^2 = \left(\frac{9}{8}\right)^2$$

מעגל שמרכזו $\left(0, \frac{3}{8}\right)$ ורדיוסו $\frac{9}{8}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & a^2-3a & 0 & t+a \\ 0 & 0 & 1-a & 2 \end{array}\right)$$

ד. אחרי דירוג:

$a=1$ – אין פתרון.

$a=t=0$ א"ס. ← כללי $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 2 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R}\right\}$

$a=3$ $t=-3$ – א"ס ← כללי

בס"ד

4. (35 נק') יהי $V=\mathbb{R}^4$. יהיו $U=sp\{(1,4,0,1),(2,0,1,0),(1,3,1,1)\}$

$W=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\,|\,x_1-x_2+x_3-x_4=0\}$ תתי מרחבים של $\mathbb{R}^4$.

א. מצאו בסיס ל W.

$x_4=x_1-x_2+x_3$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_1-x_2+x_3\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

לכן הבסיס: $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

ב. מצאו בסיס ל $W^{\perp}$ (באיזו צורה שתבחרו).

המשוואה: $x_1-x_2+x_3-x_4=0$ שזה אומר שלפי מכפלה פנימית ב-$\mathbb{R}^n$:

$$(1,-1,1,-1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0$$

כל הוקטורים שמאונכים לוקטור $(1,-1,1,-1)$ לכן

$$W^{\perp}=sp\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

ג. הביעו את U בעזרת תנאי.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&x\\4&0&3&y\\0&1&1&z\\1&0&1&w\end{array}\right)\xrightarrow[R_4-R_1]{R_2-4R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&x\\0&-8&-1&y-4x\\0&1&1&z\\0&-2&0&w-x\end{array}\right)\xrightarrow[R_4+2R_3]{R_2+8R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&x\\0&0&7&y-4x+8z\\0&1&1&z\\0&0&2&w-x+2z\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2-3\frac{1}{2}R_4}\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&0&y-\frac{1}{2}x+z-3\frac{1}{2}w\end{array}\right)$$

[illegible] שים את הווקטורים של U [illegible]

[illegible]

ד. מצאו בסיס ל $U\cap W$, וקראו לו B.

$W: x_1-x_2+x_3-x_4=0$; $x-y+z-w=0$ $\quad U: x-2y\ \cancel{+}\ 2z+7w=0$

$t \quad s$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&1&-1&0\\1&-2&-2&7&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_2-R_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&1&-1&0\\0&-1&-3&8&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_1-R_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&4&-9&0\\0&-1&-3&8&0\end{array}\right)$$

$x=-4t+9s$

$y=-3t+8s$

$$\begin{pmatrix}-4t+9s\\-3t+8s\\t\\s\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-4\\-3\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}9\\8\\0\\1\end{pmatrix}$$

לכן $y-\frac{1}{2}x+z-3\frac{1}{2}w=0$

תנאי $U \Leftarrow x-2y-2z+7w=0$

לכן הבסיס ל $U\cap W$

$$\left\{\begin{pmatrix}-4\\-3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9\\8\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ה. השלימו את הבסיס B שמצאתם בסעיף הקודם לבסיס ל $\mathbb{R}^4$. נקרא רק לווקטורים

- החדשים שהשלמתם בשם B^*

נמצא את המרחק הניצב לחיתוך: שמש:

$$\begin{pmatrix} 9 & 8 & 0 & 1 & | & 0 \\ -4 & -3 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & | & 0 \\ -4 & -3 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2+4R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \overset{t}{2} & \overset{s}{1} & | & 0 \\ 0 & 5 & 9 & 4 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$5y+9t+4s=0 \Rightarrow x+2y+2t+s=0$

$y=-\frac{9}{5}t-\frac{4}{5}s \qquad x+2\left(-\frac{9}{5}t-\frac{4}{5}s\right)+2t+s=0 \Rightarrow x=1\frac{3}{5}t+\frac{3}{5}s$

ו. הוכיחו ש: $sp(B)\oplus sp(B^*)=\mathbb{R}^4$

- לפי מה שהשלמנו, $sp\,B^*=(sp\,B)^{\perp}$, לכן

$(sp\,B)\cap(sp\,B^*)=\{\vec{0}\}$

ובסה"כ יש כאן 4 וקטורים בת"ל לכן לפי השלישי הינם הם בסיס ל $\mathbb{R}^4$ ובפרט פורשים אותו לכן

$sp\,B\oplus sp\,B^*=\mathbb{R}^4$

ז. נשים את הווקטורים של B , B^* בשורות של מטריצה A. הסבירו ללא חישוב כמה

- פתרונות יהיו למערכת : $A\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$

הינם 4 וקטורים בת"ל נקח מטריצה 4x4 ששורותיה בת"ל כלומר $rank\,A=4$ ולכן הפיכה.

לפי משפט השקולות לכל $b\in\mathbb{R}^4$ יש $Ax=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$

פתרון יחיד בלבד.

ולכן הבסיס שהשלמנו

$\begin{pmatrix}1\frac{3}{5}t+\frac{3}{5}s\\-\frac{9}{5}t-\frac{4}{5}s\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\frac{3}{5}\\ -\frac{9}{5}\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\ -\frac{4}{5}\end{pmatrix}$

5. (40 נק') יהיו $A\in\mathbb{R}^{3\times3}, B\in\mathbb{R}^{3\times4}$ כך ש A הפיכה. הוכח או הפרך :

א. נניח ש $rankB=3$. אזי השורות של B הן בת"ל.

לפי הגדרת הדרגה ו- $rank\,B = \dim R(B)$

לכן $\dim R(B) = 3$

היות ויש רק 3 שורות והן פורשות מרחב תלת מימדי
הן חייבות להיות בת"ל אחרת המימד יהיה קטן יותר.

ב. נניח ש $rankB=3$. אזי העמודות של B הן בת"ל.

<u>הפרכה:</u> לדוג' ! $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ המטריצה מדורגת עליונה
שיש 3 מובילים
ולכן $rank\,B = 3$
אבל העמודה הרביעית תלויה.

ג. למערכות $Ax=0, ABx=0$ אותם פתרונות.

לא נכון. נניח: $A = I$ B כדוג' לעיל.

לכן $Ax=0$ יש רק פתרון טריוויאלי $x=y=z=0$

ואילו $ABx=0 \overset{A=I}{\Longleftarrow} Bx=0$ ולכן

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ $x=y=z=-t$ $\begin{pmatrix} -t \\ -t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ד. למערכות $Bx=0, ABx=0$ אותם פתרונות.

כן! היות ו-A הפיכה קיימת לה הופכית $A^{-1}\in\mathbb{R}^{3\times3}$.

$A^{-1} / ABx = \vec{0}$

$\cancel{A^{-1}A}Bx = A^{-1}\vec{0}$

$Bx = \vec{0}$

אז בדיוק אותה מע' ואותם פתרונות

ה. "נדביק" את מטריצה B מימין למטריצה A ונקרא לה C אזי $rank(C)=3$.

נכון: נסתכל על העמודות של המטריצה החדשה.
3 העמודות הראשונות הן של A והרי A הפיכה
לכן הן בת"ל אזי בכל שורה יש מוביל
בצורה המדורגת לכן $rank\ C = 3$

ו. קיימת מטריצה $0 \neq D \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ כך ש $BD = 0_{3\times 3}$

נכון. הרי $B \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ אזי יש לה 4 עמודות
והן כמובן תלויות (אפילו אם 3 הראשונות הן בת"ל)
כי המימד המקסימלי של מרחב העמודות הוא 3.
לכן קיים צ"ל לט"ל של העמודות שנותן $\vec{0}$:

$$B = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$$

$$Bx = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ | & | & | & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 + \alpha_4\vec{v}_4 = \vec{0}$$

נשים את וקטור זה כעמודות של מטריצה D:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_4 & \alpha_4 \end{pmatrix} \neq 0 \qquad BD = 0$$

ניתן להשתמש
גם במרחב ניצב למרחב השורות