

תרגול 1

(1) הוכיחו כי המידה של כל קטע שווה לאורכו.

פתרון: נסמן $l(I)$ - אורך קטע $m^*(I)$ - מידה חיצונית שלו.

$m^*(I) \leq l(I)$: אם $l(I) < \infty$ סיימנו. אחרת, נניח כי $I = [a, b]$ או (a, b) וכו' נזכיר כי עפ"י הגדרה :

$$m^*(I) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \mid \bigcup_{I_n \text{ open}} I_n \supset I \right\}$$

הקטע $I_\varepsilon = (a - \varepsilon, b + \varepsilon)$ מכיל את I ואורכו $l(I) + 2\varepsilon$ ומכאן שלכל $\varepsilon > 0$

$$m^*(I) \leq l(I) + 2\varepsilon \Rightarrow m^*(I) \leq l(I)$$

$$: m^*(I) \geq l(I)$$

נחלק למקרים:

i. אם I קומפקטי $I = [a, b]$: נניח ש $\{I_n\}$ הינו אוסף של קטעים פתוחים כך ש

$\bigcup I_n \supseteq I$. מכיוון ש I קומפקטי קיים אוסף סופי של קטעים פתוחים

$A = \{I_1, \dots, I_n\}$ כך ש $\bigcup_{i=1}^k I_i \supseteq I$. נבנה את הקבוצה A באופן הבא:

נבחר $I_1' \in A$ להיות איזשהו קטע שמכיל את a , וגם

$$I_1' = (x_1, y_1): x_1 < a < y_1$$

$$I_2' = (x_2, y_2): x_2 < y_1 < y_2$$

⋮

$$I_i' = (x_i, y_i): x_i < y_{i-1} < y_i$$

⋮

$$I_k' = (x_k, y_k): x_k < b < y_k$$

עכשיו, מכל כיסוי $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (יכול להיות גם אינסופי) נוכל ליצור כיסוי סופי של קטעים פתוחים (כמו מקודם) ומתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \geq \sum_{i=1}^k l(I'_i) = \sum_{i=1}^k (y_i - x_i) \geq b - a$$

ומכאן נובע

$$m^*(I) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \mid \bigcup_{I_n \text{ open}} I_n \supset I \right\} \geq l(I)$$

ii. עבור קטע כללי מהצורה $I = (a, b), (a, b), [a, b)$ נשתמש בעובדה כי $I' = [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ ונשים לב שמתקיים $A \subseteq B \Rightarrow m^*(A) \leq m^*(B)$ לכל $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} b - a - 2\varepsilon = m^*(I') &\leq m^*(I) \\ \Rightarrow b - a &\leq m^*(I) \end{aligned}$$

iii. עבור קטע מהצורה (a, ∞) או $[a, \infty)$ נבחר $[a + 1, a + n] \subseteq I$ ולכן לכל n מתקיים $m^*(I) \geq n - 1 \Rightarrow m^*(I) = \infty$

מש"ל

(2) הוכיחו כי אם $m^*(A) = 0$ אזי $m^*(A \cup B) = m^*(B)$. פתרון:

\geq : $B \subseteq A \cup B$ ולכן $m^*(A \cup B) \geq m^*(B)$.
 \leq : עפ"י ה sub-additive property מתקיים

$$\begin{aligned} m^*(A \cup B) &\leq m^*(A) + m^*(B) \\ \Rightarrow m^*(A \cup B) &\leq m^*(B) \end{aligned}$$

(3) תהי A קבוצת האי רציונאליים באינטרוול $[0, 1]$. הוכח כי $m^*(A) = 1$. פתרון:

המידה החיצונית של כל נקודה ב \mathbb{R} היא 0 מכיוון שאם $x \in \mathbb{R}$ נקודה, אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיים הקטע $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ שאורכו 2ε ומכיל את x , לכן :

לכל $m^*(x) \leq 2\varepsilon \Rightarrow m^*(x) = 0$.

נסמן ב B את קבוצת הראציונאליים ב $[0,1]$, B היא בת מנייה ולכן נוכל לרשום $B = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ כמו כן

$$m^*(B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(x_i) = 0 \Rightarrow m^*(B) = 0$$

נזכור כי $[0,1] = B \cup A$ ולכן

$$1 = m^*([0,1]) \leq m^*(B) + m^*(A) = m^*(A)$$

מצד שני

$$m^*(A) = 1 \Leftarrow 1 \geq m^*(A) \text{ ולכן } [0,1] \supseteq A$$

מש"ל

(4) תהי B קבוצת הרציונאליים ב $[0,1]$ ותהי $\{I_k\}_{k=1}^n$ קבוצה סופית של קטעים פתוחים שמכסה

$$\text{את } B. \text{ הוכיחו כי } \sum_{k=1}^n m^*(I_k) \geq 1.$$

פתרון:

$$1 = m^*([0,1]) = m^*(\overline{A}) \leq m^*(\overline{\bigcup I_n}) = m^*(\bigcup \overline{I_n}) \leq \sum m^*(\overline{I_n}) = \sum l(\overline{I_n})$$

מש"ל

שימו לב כי השיוויון $\overline{\bigcup I_n} = \bigcup \overline{I_n}$ מתקיים כי קבוצת הקטעים $\{I_k\}_{k=1}^n$ הינה סופית.

אם ניקח לדוגמא את הסדרה $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ כאשר $I_k = \left(\frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{k}\right)$ נקבל כי

$$\overline{\bigcup I_k} = \overline{\bigcup \left(\frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{k}\right)} = \overline{(0,1)} = [0,1]$$

לעומת זאת

$$\bigcup \overline{I_k} = \bigcup \left[\frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{k}\right] = (0,1)$$

(5) הוכח: כל קבוצה פתוחה $G \subseteq \mathbb{R}$ הינה איחוד בן מניה של קטעים זרים פתוחים ב \mathbb{R} .

פתרון:

לכל $x \in G$, יהי I_x הקטע הפתוח הגדול ביותר ב \mathbb{R} כך שמתקיים $x \in I_x \subseteq G$. נניח כי

וגם $x, y \in G$ אזי $I_x \cap I_y \neq \emptyset$ הינו קטע פתוח וכן

$$I_x \subseteq I_x \cup I_y \subseteq G$$

וגם

$$I_y \subseteq I_x \cup I_y \subseteq G$$

מההגדרה של I_x ו I_y נובע ש $I_x = I_x \cup I_y$ וכן $I_y = I_x \cup I_y$ ולכן $I_y = I_x$. מכאן נובע כי I_x ו I_y הינם שווים או זרים, ולכן G הינו איחוד זר של קטעים פתוחים ב \mathbb{R} .

$$G = \bigcup_{I \in \mathcal{C}} I$$

כעת נראה כי \mathcal{C} הינו אוסף בן מניה. נשים לב כי כל $I \in \mathcal{C}$ מכיל מספר ראציונאלי x_I .
נוכל לבנות מיפוי חח"ע ועל

$$\varphi: \mathcal{C} \rightarrow \{x_I : I \in \mathcal{C}\}$$

ע"י $\varphi(I) = x_I$ לכל $I \in \mathcal{C}$. כלומר, לכל $I \in \mathcal{C}$ נתאים את הראציונאלי שבחרנו ממנו.
כמובן ש $\{x_I : I \in \mathcal{C}\} \subseteq \mathbb{Q}$ ולכן הינה בת מניה ומכאן ש \mathcal{C} בת מנייה.