גבולות

גבול בנקודה

<u>הגדרה</u>: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ אם $c \ne x \approx c \Rightarrow f(x) \approx L$.

<u>חישוב</u>: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \underset{0\ne\Delta x\approx 0}{\mathrm{st}}\left(f(c+\Delta x)\right)$.

<u>דוגמה</u>

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-1} = \underset{0\ne\Delta x\approx 0}{\mathrm{st}}\left(\frac{(1+\Delta x)^2+(1+\Delta x)-2}{(1+\Delta x)^2-1}\right) = \underset{0\ne\Delta x\approx 0}{\mathrm{st}}\left(\frac{3+\Delta x}{2+\Delta x}\right) = \frac{3}{2}.$$

גבולות חד-צדדיים

<u>הגדרה</u> (גבול מימין): $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = L$ אם $c < x \approx c \Rightarrow f(x) \approx L$.

<u>חישוב</u>: $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = \underset{0<\Delta x\approx 0}{\mathrm{st}}\left(f(c+\Delta x)\right)$.

<u>הגדרה</u> (גבול משמאל): $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = L$ אם $c > x \approx c \Rightarrow f(x) \approx L$.

<u>חישוב</u>: $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \underset{0>\Delta x\approx 0}{\mathrm{st}}\left(f(c+\Delta x)\right)$.

<u>דוגמאות</u>

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{|x-1|}{x-1} = \underset{0<\Delta x\approx 0}{\mathrm{st}}\left(\frac{|1+\Delta x-1|}{1+\Delta x-1}\right) = \underset{0<\Delta x\approx 0}{\mathrm{st}}\left(\frac{|\Delta x|}{\Delta x}\right) = \underset{0<\Delta x\approx 0}{\mathrm{st}}\left(\frac{\Delta x}{\Delta x}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|}{x-1} = \underset{0>\Delta x\approx 0}{\mathrm{st}}\left(\frac{|1+\Delta x-1|}{1+\Delta x-1}\right) = \underset{0>\Delta x\approx 0}{\mathrm{st}}\left(\frac{|\Delta x|}{\Delta x}\right) = \underset{0>\Delta x\approx 0}{\mathrm{st}}\left(\frac{-\Delta x}{\Delta x}\right) = -1$$

<u>משפט</u> (הקשר בין גבול לגבולות חד-צדדיים):

$\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ אמ"מ $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \lim\limits_{x\to c^+} f(x) = L$.

<u>למשל</u>, הגבול $\lim\limits_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x-1}$ אינו קיים, שכן הגבולות החד-צדדיים אמנם קיימים, אך שונים.

גבולות אינסופיים

<u>הגדרות</u>

יהיו $c,L\in\mathbb{R}$.

1. $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ אם: **לכל** מספר היפר-ממשי אינסופי חיובי H, מתקיים $f(H)\approx L$.

   כלומר: $\lim_{x\to\infty} f(x)=st\left(f(H)\right)$, עבור H אינסופי חיובי.

   באופן דומה מגדירים $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$.

2. $\lim_{x\to c} f(x)=\infty$ אם: לכל x המקיים $c\neq x\approx c$, הביטוי $f(x)$ הוא אינסופי חיובי.

   באופן דומה מגדירים $\lim_{x\to c} f(x)=-\infty$.

<u>דוגמאות</u>

1. נחשב $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

יהי $x=\Delta x$ עבור $0>\Delta x\approx 0$. אזי $\sqrt[3]{\Delta x}$ הוא אינפי' שלילי, ולכן $\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}$ הוא אינסופי שלילי. לכן $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=-\infty$.

2. נחשב $\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x-1}$.

   יהי $x=H$ עבור H אינסופי חיובי. אזי $\frac{\cos H}{H-1}=\frac{\text{סופי}}{\text{אינסופי}}=\text{אינפי}$

   ולכן $\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x-1}=st\left(\frac{\cos H}{H-1}\right)=0$.

3. הגבול $\lim_{x\to\infty} x\cos x$ אינו קיים. נוכיח זאת על-ידי כך שנראה כי הגבול תלוי בבחירת מספר אינסופי H.

   נסמן $f(x)=x\cos x$.

   יהי K מספר היפר-שלם אינסופי חיובי.

   אם $H=2\pi K$, אזי $\cos H=1$ ומכאן: $f(H)=H\cos H=H$ ולכן $\lim_{x\to\infty} x\cos x=\infty$.

   מצד שני, אם $H=\frac{\pi}{2}+\pi K$ אזי $\cos H=0$ ומכאן:

   $f(H)=H\cos H=H\cdot 0=0$ ולכן $\lim_{x\to\infty} x\cos x=0$.

   מכיוון ש-$f(H)$ תלוי בבחירת H, נסיק כי הגבול אינו קיים.

רציפות

<u>הגדרה</u>: f **רציפה** בנקודה $c\in\mathbb{R}$ אם f מוגדרת ב-c ומתקיים: $x\approx c\Rightarrow f(x)\approx f(c)$.

<u>משפט</u>: f רציפה בנקודה $c\in\mathbb{R}$ אמ"מ $\lim\limits_{x\to c}f(x)=f(c)$.

<u>בדיקת רציפות בנקודה</u> $c\in\mathbb{R}$

- האם הביטוי $f(c)$ מוגדר? אם לא, הפונקציה אינה רציפה ב-c. אם כן – ממשיכים לשלב הבא.
- האם הגבול $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ קיים? אם לא, הפונקציה אינה רציפה ב-c. אם כן – ממשיכים לשלב הבא.
- האם $\lim\limits_{x\to c}f(x)=f(c)$? אם לא, הפונקציה אינה רציפה ב-c. אם כן – הפונקציה רציפה ב-c.

<u>דוגמאות</u>

1. האם $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$ רציפה ב-$x=1$?

   תשובה: לא, כי $f(1)$ אינו מוגדר.

2. האם $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-1}{x-1} & x\neq 1\\ 2 & x=1\end{cases}$ רציפה ב- $x=1$?

   תשובה: $f(1)$ מוגדר ומתקיים $f(1)=2$, לכן נבדוק את הגבול.

   $$\lim_{x\to 1}f(x)=\underset{0\neq\Delta x\approx 0}{st}f(1+\Delta x)=\underset{0\neq\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{2(1+\Delta x)-1}{1+\Delta x-1}\right)=\underset{0\neq\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{1+2\Delta x}{\Delta x}\right)$$

   הביטוי $\dfrac{1+2\Delta x}{\Delta x}$ הוא אינסופי ולכן אין לו חלק סטנדרטי. לכן, הגבול $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ אינו קיים, והפונקציה אינה רציפה ב-$x=1$.

3. האם $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x-1} & x\le 0\\ x-2 & x>0\end{cases}$ רציפה ב-$x=0$?

   תשובה: הפונקציה מוגדרת ב-$x=0$, ולכן נבדוק גבול.

   $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\underset{0\neq\Delta x\approx 0}{st}f(0+\Delta x)=\underset{0\neq\Delta x\approx 0}{st}f(\Delta x)$.

מכאן חייבים לפצל למקרים, מכיוון שאנו לא יודעים באיזה חלק של f להציב את Δx, שכן אנו לא יודעים מה הסימן של Δx.

א. $\Delta x>0$

במקרה זה אנו מחשבים, למעשה, את הגבול הימני:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \underset{0<\Delta x\approx 0}{st}(\Delta x-2) = -2 .$$

ב. $\Delta x<0$

במקרה זה אנו מחשבים גבול משמאל:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \underset{0>\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{\Delta x+2}{\Delta x-1}\right) = -2 .$$

כעת רואים שמתקיים $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$ ולכן הגבול $\lim_{x\to 0} f(x)$ קיים.

נותר לבדוק שהוא שווה לערך הפונקציה בנקודה, ואכן מתקיים

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -2 = f(0) .$$

לסיכום, הפונקציה רציפה ב-$x=0$.

<u>הערה</u>: הפונקציה $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x-1} & x\le 0\\ x-2 & x>0\end{cases}$ רציפה, למעשה, בכל $\mathbb{R}$. ואכן, היא רציפה עבור $x<0$ שכן היא פונקציה רציונלית שהמכנה שלה לא מתאפס בתחום הנתון. היא רציפה עבור $x>0$ שכן היא פולינום, והיא רציפה ב-$x=0$ כפי שהוכחנו לעיל.

גזירות

<u>הגדרה</u>: f **גזירה** בנקודה $c\in\mathbb{R}$ אם הביטוי $st\left(\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\right) = st\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ **קיים וסופי לכל** $0\neq\Delta x\approx 0$ **ואינו תלוי** ב-Δx.

במקרה זה מתקיים $f'(c) = \underset{0\neq\Delta x\approx 0}{st}\left(\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\right)$.

<u>דוגמה</u>:

האם $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x-1} & x\le 0\\ x-2 & x>0\end{cases}$ גזירה בנקודה $x=0$?

תשובה:

נחשב את הנגזרת על-פי ההגדרה:

$$f'(0) = \underset{0\neq\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}\right) = \underset{0\neq\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{f(\Delta x)+2}{\Delta x}\right)$$

מכיוון שאנו לא יודעים את הסימן של Δx, עלינו לפצל למקרים.

א. $\Delta x > 0$

$$\underset{0<\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{f\left(\Delta x\right)+2}{\Delta x}\right)=\underset{0<\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{\left(\Delta x-2\right)+2}{\Delta x}\right)=1$$

ב. $\Delta x < 0$

$$\underset{0>\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{f\left(\Delta x\right)+2}{\Delta x}\right)=\underset{0<\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{\left(\frac{\Delta x+2}{\Delta x-1}\right)+2}{\Delta x}\right)=$$

$$\underset{0<\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{3\Delta x}{\Delta x\left(\Delta x-1\right)}\right)=\underset{0<\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{3}{\Delta x-1}\right)=-3$$

בשלב זה רואים שהנגזרת תלויה ב- Δx, ולכן f אינה גזירה בנקודה $x=0$.

שאלות לתרגול עצמי

<u>שאלה 1</u>

האם הפונקציה $f(x)=\begin{cases}4x-2 & x\le 1\\ 2x^2 & x>1\end{cases}$ רציפה ב-$\mathbb{R}$? האם היא גזירה ב-$\mathbb{R}$?

<u>שאלה 2</u>

לאילו ערכי $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ הפונקציה הבאה גזירה?

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+b & x<1\\ cx+d & 1\le x<3\\ (x-4)^2-1 & x\ge 3\end{cases}$$

<u>שאלה 3</u>

חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{2\cos x-1}$

ב. $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

<u>שאלה 4</u>

תהי f פונקציה ממשית ויהי $L\in\mathbb{R}$.

א. הוכיחו: $\lim\limits_{x\to 0}f(x^3)=L$ אם ורק אם $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=L$.

ב. נתבונן בטענה הבאה:

$\lim\limits_{x\to 0}f(x^2)=L$ אם ורק אם $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=L$.

האם זו טענה נכונה? אם כן – הוכיחו; אם לא – הביאו דוגמה נגדית.

עבודה נעימה!