מערך תרגול מס' 4

23 בנובמבר 2012

תקציר

נושאים: מכפלה קרטזית של חבורות, חבורה סימטרית, חבורה דיהדרלית, משפט לגרנז', סדר של איבר מחלק את סדר של חבורה, תתי־חבורות נורמליות, חבורות מנה, יוצרים.

1 בניות של חבורות:

1.1 מכפלה קרטזית של חבורות

הוגדר בתרגול הראשון הקודם ־ לכן יש להעזר במערך של התרגול הקודם לצורך דוגמאות בסיסיות.

1.2 חבורה ציקלית

הגדרה 1.1 חבורה G היא ציקלית אם קיים $g \in G$ כך ש־$\langle g \rangle = G$. במקרה זה g נקרא היוצר של G.

תרגיל: תהי G חבורה ציקלית. הוכח שכל תת־חבורה של G היא ציקלית ותן אפיון מדוייק שלה.

פתרון: מכיוון ש G ציקלית, קיים $g \in G$ כך ש $G =< g >$. תהי $H \leq G$ ת"ח של G. אם $G = \{1_G\}$ אז ברור שהטענה מתקיימת. אחרת, $H^+ := \{g^n \in H : n > 0\}$ אינה ריקה. יהי $d > 0$ המעריך המינימלי המקיים $g^d \in H^+$. טענה: $H = \left\langle g^d \right\rangle$. נניח בשלילה שלא. ההכלה $\left\langle g^d \right\rangle \supseteq H$ היא טריוויאלית, כי חבורה סגורה לכפל איבריה. לכן, השלילה היא $H \nsubseteq \left\langle g^d \right\rangle$. אזי קיים $h \in H$ כך ש h אינו חזקה של g^d. מכיוון ש G ציקלית ו g הוא היוצר של G, קיים k כך ש $h = g^k$. על פי תכונת האוקלידיות קיים $0 \leq r < d$ כך ש $k = qd + r$. על פי ההנחה, h אינו ב $\left\langle g^d \right\rangle$, ולכן $d \nmid k$. מכאן נובע $r \neq 0$. לכן $g^r = g^k g^{-qd} \in H$. אבל $r < d$ בסתירה לכך ש d הוא מינימלי שמקיים $g^d \in H^+$.

1.3 חבורה הסימטרית

דוגמאות והגדרות בסיסיות מופיעות במערך תרגול הקודם ־ לכן נפתח בשלב הזה רק את סימון של תמורה ונראה שתמורות זוגיות יוצרות תת־חבורה (ניתן לדחות את זה לשלב של קבוצות יוצרות).

1.4 חבורה דיהדרלית

הוגדר בתרגול הקודם.

2 משפט לגרנז'

2.1 משפט לגרנז'

משפט 2.1 תהי G חבורה סופית, תהי $H \leq G$. אזי $|H| \mid |G|$, ומתקיים $[G : H] = \frac{|G|}{|H|}$.

תרגיל תהי G חבורה מסדר 120. עבור אילו מהמספרים $1,2,7,9,15,60,240$ הוא סדר אפשרי עבור תת־חבורה של G? עבור כל סדר אפשרי, מצא את האינדקס המתאים.

2.2 סדר של איבר שווה לסדר של חבורה הציקלית שנוצרת על ידו.

הגדרה 2.2 תהי G חבורה, $g \in G$, ויהי $o(g)$ המספר החיובי המינימלי, כך ש $g^{o(g)} = 1_g$. $o(g)$ נקרא הסדר של g.

משפט 2.3 $o(g) = |\langle g \rangle|$.

תרגיל: תהי G חבורה, $a,b \in G$ כך ש $ab = ba$. הוכח, $o(ab) \mid lcm(o(a), o(b))$.

פתרון: מתקיים $ab^{lcm(o(a),o(b))} = a^{lcm(o(a),o(b))} b^{lcm(o(a),o(b))} = 1_g$.

תרגיל: מהו סדר של איבר ב $\mathbb{Z}_n$?

פתרון: יהי $0 \leq m < n$. אזי הסדר של $[m] \in \mathbb{Z}_n$ הוא $l = \frac{lcm(m,n)}{m}$.

הוכחה: לכל חזקה k של $[m] \in \mathbb{Z}_n$ שקטנה מ l, מתקיים $"[m]^k" = [km] \not\equiv 0 \mod n$. מצד שני $[lm] \equiv 0 \mod n$, ולכן החזקה המינימלית שמאפסת את $[m]$ היא l. ■

תרגיל: תהי $G = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_4$.

1. מהו סדר של G.
2. מהו סדר אפשרי של איבר ב G.
3. האם קיים איבר מסדר 24.

פתרון:

1. $6 \cdot 4 = 24$
2. לפי משפט לגרנז', סדר של איבר מחלק את סדר של חבורה, לכן סדרים אפשריים של איבר ב G, הם כל המחלקים של G.
3. יהי $(a,b) \in G$. אזי מתקיים $o(a,b) = lcm(o(a), o(b))$. לכל $a \in \mathbb{Z}_6, b \in \mathbb{Z}_4$ מתקיים $6 \mid o(a)$, $4 \mid o(b)$, לכן $o((a,b)) \mid lcm(6,4) = 12$. ולפיכך $o((a,b)) < 24$.

תרגיל:

1. יהי $\tau \in S_n$ מחזור בעל אורך k. מה הוא הסדר שלו?
2. תהי תמורה $\sigma \in S_n$, $\{l_1, \dots l_m\}$מבנה המחזורים שלה. מהו סדר של σ?

פתרון:

1. סדר של תמורה $\tau \in S_n$ מאורך k הוא k. τ מחזור מאורך k, זאת אומרת שקיימים $x_1, \dots x_k$ כך ש $\tau = (x_1, \dots x_k)$. לכל $i < k$, ולכל $1 \leq j < k$ מתקיים $\tau^i(x_j) = x_{j+i \mod k} \neq x_j$. מצד שני $\tau^k(x_j) = x_j$ולכן החזקה המינימלית i של τ כך ש $\tau^i = id$ היא k.
2. הסדר שלה הוא $lcm(l_1, \dots, l_r)$. נביט באיבר x_1 שנמצא בתומך של σ_1. n מקיים $\sigma^n(x_1) = x_1$ א.ס.ס. $n \mid l_1$. לפיכך הסדר של σ מחלק את l_1. באופן דומה, ניתן להראות כי לכל $1 \leq i \leq r$, מתקיים $l_i \mid o(\sigma)$. ביחד אנו מקבלים כי $lcm(l_1, \dots, l_r) \mid o(\sigma)$. כעת נביט ב־$\sigma^{lcm(l_1,\dots,l_r)}(x)$. המחזורים ב־$\sigma$ הם זרים, ולכן אנו יודעים כי קיים לכל היותר i יחיד כך ש־x נמצא בתומך של σ_i. לכן $\sigma^{lcm(l_1,\dots,l_r)}(x) = \sigma_i^{lcm(l_1,\dots,l_r)}(x) = \sigma_i^{a \cdot l_i}(x) = x$. לפיכך, $\sigma^{lcm(l_1,\dots,l_r)} = id$. לסיכום, הוכחנו כי הסדר של σ הוא $lcm(l_1, \dots, l_r)$.

   נשים לב, שמכפלה של מחזורים זרים לעולם לא תתן לנו פונקציית זהות. כמו כן, אם σ, τ הם מחזורים זרים, אזי אם $id \neq \tau^k = \tau_1 \dots \tau_n$, $id \neq \sigma^k = \sigma_1 \dots \sigma_m$ הם הפירוקים של τ, σ למחזורים זרים, אזי לכל $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ המחזורים σ_i ו τ_j יהיו זרים. לכן, אם נעלה את σבחזקת α שלא מתחלקת ב l_i כלשהו, אזי $\sigma^\alpha \neq id$.

3 קבוצות יוצרות

3.1 תת־חבורה נוצרת על ידי קבוצה

הגדרה 3.1 תהי $H \subset G$ קבוצה כלשהי. נסמן $H^{-1} := \left\{h^{-1} : h \in H\right\}$.תהי $\langle H \rangle$אוסף כל הכפולות של איברי $H \cup H^{-1}$. אזי $\langle H \rangle$היא תת־חבורה של G. (יש סגירות ־ כי מכפלה של כפולות של איברי $H \cup H^{-1}$ היא בעצמה כפולה של איברי $H \cup H^{-1}$.יש הופכי: עבור $h = h_1 \dots h_k$, קל לבדוק ש $h_k^{-1} \dots h_1^{-1}$ הוא ההופכי של h. חבורה זו נקראת החבורה שנוצרת על ידי H.

משפט 3.2 $\langle H \rangle = \cap_{H \subseteq K \leq G} K$. $\langle H \rangle$נקראת התת חבורה המינימלית שמכילה את H.

תרגיל: מצא את תת־חבורה של $\mathbb{Z}$ שנוצרת על ידי $\{6, 10, 14\}$.

פתרון: לפי התרגיל שהוכחנו בסעיף על חבורות ציקליות, נובע ש $\langle\{6, 10, 14\}\rangle$ הינה ציקלית. מצד שני איבר נמצא ב $\langle\{6, 10, 14\}\rangle$ אם ורק אם הוא צירוף של $6, 10, 14$. אנו מעוניינים בצירוף החיובי המינימלי ־ כפי שהוכחנו הוא יוצר את החבורה. זה הוא בדיוק $\gcd(6, 10, 14)$ כלומר 2.

טענה 3.3 מכפלה של תמורות זוגיות היא זוגית.

3.2 קבוצה יוצרת של חבורה

הגדרה 3.4 תהי $X \subset G$. אם $\langle X \rangle = G$ אנו אומרים שהקבוצה X יוצרת את G.

דוגמא: תהי $C \subset S_n$ קבוצה של כל המחזורים ב S_n. אזי $< C >= S_n$.

דוגמא: נשים לב שכל מחזור ב S_n ניתן לבטא כמכפלה של חילופים. לכן קבוצת כל החילופים ב S_n יוצרת את S_n.

דוגמא: כל חילוף ניתן לבטא כמכפלה של חילופים סמוכים. לכן $(12), (23), \dots, (n-1n)$ יוצרת את S_n.

דוגמא: חבורה דיהדרלית: נזכר בשיקוף וסיבוב. כל איבר של חב' דיהדרלית אפשר לבטא ככפל של חילופים וסיבובים.

4 תתי־חבורות נורמליות וחבורות מנה

4.1 תת־חבורה נורמלית.

הגדרה 4.1 $N \leq G$ נקראת תת חבורה נורמלית אם לכל $g \in G$ מתקיים $gN = Ng$ (או לחלופין $gNg^{-1} = N$). אנו מסמנים זאת $N \trianglelefteq G$.

דוגמאות:

1. תהי G חבורה אבלית. לכל $H \leq G$, H נורמלית.
2. $SL_n(F)$ היא תת־חבורה נורמלית של $GL_n(F)$. הוכחה: לפי האפיון של הקוסטים שלהן.
3. $\langle(12)\rangle$ אינה תת־חבורה נורמלית ב S_3. הוכחה: מתקיים $(13)(12)(13) = (23) \notin \langle(12)\rangle$.

תרגיל: הוכח $K_4 = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ היא תת־חבורה נורמלית של S_4. האם היא נורמלית ב־S_5?

פתרון: מספיק להראות עבור קבוצה יוצרת כלשהי של S_4. ניקח קבוצת כל החילופים העוקבים ונבדוק עבור כל אחב מהאיברים. בדיקה פשוטה מראה שלכל חילוף, הצמדה בו נותנת איבר ב K_4. לעומת זאת, ב־S_5 ניתן לראות דוגמא נגדית בעזרת (15), מתקיים $(15) \cdot (12)(34) \cdot (15) = (25)(34) \notin K_4$.

הוכח: כל תת־חבורה מאינדקס 2 היא נורמלית.

פתרון: נזכיר שחיתוך של קוסטים זרים הוא ריק. אם $g \in H$, אזי $gH = Hg = H$. אם $g \notin H$, אזי $gH = H^c = Hg$.

הגדרה 4.2 תהי $\sigma \in S_n$ תמורה. עבור $i < j \in \{1, \ldots, n\}$ אנו אומרים ש $< i, j >$ הוא היפוך אם $\sigma(i) > \sigma(j)$. אם מספרי ההיפוכים בתמורה הוא זוגי, אנו נאמר שתמורה היא זוגית ונאמר כי הסימן של התמורה הוא חיובי. אם מספר ההיפוכים הוא אי־זוגי, נאמר שתמורה היא אי־זוגית ונאמר כי הסימן שלה הוא שלילי. ניתן לראות את הקשר בין הגדרה זו לתזכורת בסעיף 3.1.

בהמשך נראה שיש הגדרה שקולה והיא

הגדרה 4.3 סימן של תמורה σ בעלת מבנה מחזורים $\{l_1, \ldots, l_r\}$ מוגדר להיות חיובי אם $\sum_{i=1}^{r} (l_i - 1)$ זוגי, ושלילי אחרת.

טענה 4.4 כפל בחילוף משמאל משנה את הסימן של תמורה.

הוכחה: יהי $k = \sigma^{-1}(i), l = \sigma^{-1}(j)$. כפל $(i\,j)$ משפיע אך ורק על $(i\,j)\sigma(k)$ ו $(i\,j)\sigma(l)$. בה"כ נניח ש $l < k$. המקרה השני סימטרי. נבדוק את הזוגיות של כמות החילופים שמושפעת מכך ש i עובר ל j. אם $\sigma(t) > i, j$ אזי לא מתווספים היפוכים. אם $\sigma(t) < i, j$ גם כמות ההיפוכים אינה משתנה אם $i < \sigma(t) < j$ אזי אנו מוסיפים שני היפוכים. לכן זוגיות של החילופים בינהם אינה משתנה. יחד עם זאת, אם k, l הופך להיות חילוף. ■

מסקנה 4.5 אם $\sigma = \tau_1 \ldots \tau_n$ כאשר τ_i הם חילופים, σ זוגית אם n זוגי ו σ אי זוגית כאשר n אי זוגי. לכן אם $\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_m = \tau_1 \ldots \tau_n$ כאשר σ_i, τ_j הם חילופים, $m \equiv n \pmod 2$.

תרגיל: הוכח, אוסף כל התמורות הזוגיות הן חבורה נורמלית.

הוכחה: ראינו, שאוסף של תמורות זוגיות סגור לכפל. נראה שהוא סגור ביחס להופכי: תהי $\tau = \tau_1 \ldots \tau_m$ תמורה זוגית כאשר τ_iהם חילופים. אזי $\tau_m \ldots \tau_1$ היא ההופכית שלה והיא תמורה זוגית. לכן יש סגירות ביחס לחילוף. נראה שהיא נורמלית. תהי $\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_n$ תמורה זוגית, כאשר σ_iהם חילופים, $\tau = \tau_1 \ldots \tau_k$תמורה כלשהי, ($\tau_i$חילופים).
אזי $\tau\sigma\tau^{-1} = \tau_1 \ldots \tau_k \sigma_1 \ldots \sigma_n \tau_k \ldots \tau_1$. מכיוון ש n זוגי, $\tau\sigma\tau^{-1}$היא ניתן לבטא כמכפלה של חילופים באורך $n + 2k$ ולכן זוגית. ■

4.2 חבורות מנה

הגדרה 4.6 תהי G חבורה, $N \trianglelefteq G$ תת־חבורה נורמלית של G. נסמן ב G/N את קבוצת הקוסטים השמאליים. מכיוון ש G נורמלית, אין הבדל בין קוסטים ימניים לשמאליים. עבור קוסטים gN, hN נגדיר פעולת כפל של קוסטים $gN \cdot hN = ghN$. אנו טוענים כי הכפל מוגדר היטב ויחד עם פעולה זו G/N היא חבורה. אזי G/N נקראת חבורת מנה של G מעל N.

תרגיל: מצא את חבורת מנה של $\mathbb{Z}$ מעל $m\mathbb{Z}$. באיזו חבורה מדובר?

פתרון: האיברים של החבורה הם בדיוק הנציגים של מחלקות שקילות מודולו m. החיבור הוא חיבור מודולו m.

תרגיל: מצא את חבורת מנה של S_3 מעל $\langle(123)\rangle$.

פתרון: האינדקס של $\{\langle(123)\rangle\}$בתוך S_3 הוא 2. לכן יש רק שני נציגים לחבורת המנה. ניקח $\langle(123)\rangle$ ו $\langle(123)\rangle\,(12)$.