תזכורת - אינטגרל רימן

אינטגרל רימן מוגדר בעזרת סכומי רימן. בפרט אם $f(x)$ מוגדרת וחסומה ב$[a,b]$ נעשה חלוקה P של $[a,b]$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

סכום רימן בנוי על P הוא סכום מהסוג $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1})$ עבור איזה $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

דורשים שכאשר החלוקה נעשית עדינה ביותר כל סכומי רימן שואפים לגבול אחד. אם כן, f אינטגרבילית, ו$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ הוא הגבול הנ"ל.

עבור $f(x) \geq 0$ ורציפה (גם אם למקוטעין) האינטגרל מתכנס לשטח מתחת לגרף.

מה טוב באינטגרל רימן?

כמעט הכל!

מה לא טוב באינטגרל רימן?

1. יש "הרבה" פונקציות לא אינטגרביליות רימן. למשל פונקציית דריכלה $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

2. אין אפיון לפונקציות האינטגרביליות רימן.

3. אם $f_n \to f$ במ"ש ב$[a,b]$ וכולן אינטגרביליות רימן אז $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$, אבל אם $f_n \to f$ נקודתית אין משפט שיאמר מתי $\int f_n \to \int f$.

4. אם $f(x)$ רציפה ב$[a,b]$ אז $f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. מה קורה אם f לא רציפה ב$[a,b]$?

5. אם $f'(x)$ רציפה ב$[a,b]$ אז $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$. זה גם נכון, למשל, אם f רציפה וf' רציפה למקוטעין. עד היכן אפשר להכליל נוסחה זו? אין תשובה מדוייקת בתורת רימן.

6. אם ל$f(X)$ על $[-\pi,\pi]$ יש טור פורייה פורמלי $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$, משפט פרסבל אומר

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$$

שאלה הפוכה: אם $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 < \infty$ האם הטור

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

מתכנס באיזשהו מובן לפונקציה <u>אינטגרבילית</u> $f(x)$ שהטור טור פורייה שלה?

תשובה: בתורת רימן לא, בתורת לבג כן!

האינטגרל ע"פ לבג

אפשר לומר שתחילת החידוש של לבג היא שבמקום לחלק את ציר הx מחלקים את ציר הy.
הרעיון הוא שלכל "פס" בחלוקה של ציר הy, לוקחים את המידה של כל הקטעים על ציר הx שהפונקציה נותנת עבורם ערכים באותו פס.
"השטח מתחת לגרף" מקורב ע"י "סכום לבג"

$$\sum_{k=1}^{n} y_k m\left(E_k\right)$$

כאשר

$$E_k = \{x \in [a,b] | y_{k-1} \leq f\left(x\right) < y_k\}$$

ו$m\left(E_k\right)$ = המידה או הגודל של E_k.
כאשר החלוקה נעשית עדינה ביותר, נדרוש שכל סכומי לבג ישאפו לגבול אחד. אם כן f אינטגרבילית לבג ב$[a,b]$, והגבול הוא $\int\limits_{[a,b]} f \,\mathrm{d}m$.
כאשר $f\left(x\right)$ רציפה ב$[a,b]$ אז כל

$$E_k = \{x \in [a,b] | y_{k-1} \leq f\left(x\right) \leq y_k\}$$

הוא איחוד של קטעים וברור שמידתה היא סכום אורי הקטעים.
אבל אם f לא רציפה ב$[a,b]$ אז הקבוצות $E_x \subset [a,b]$ הן קבוצות כלשהן, וצריכים להגדיר מידת קבוצה כלשהי.

הגדרה - מידה חיצונית

תהי $E \subset \mathbb{R}$ קבוצה כלשהי. נגדיר את המידה החיצונית של E ע"י

$$m^*\left(E\right) = \inf_{E \in \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} I_n} \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$$

כאשר הI_n קטעים פתוחים ו$|I_n|$ אורך I_n.

כלומר: החסם התחתון של סכום אורכי קבוצת הקטעים הפתוחים הקטנה ביותר המכילה את כל הנקודות.

לכן, עבור כל $E \subset \mathbb{R}$, $m^*\left(E\right)$ מוגדרת היטב ומקיימת $0 \leq m^*\left(E\right) \leq +\infty$

משפט 1

(א) $m^*\left(\{x_0\}\right) = 0 = m^*\left(\emptyset\right)$ עבור כל $x_0 \in \mathbb{R}$

(ב) אם $A \subset B \subset \mathbb{R}$ אזי $m^*\left(A\right) \leq m^*\left(B\right)$

הוכחה

(א) טריוויאלי.

(ב) כל כיסוי פתוח של B הוא גם כיסוי פתוח של A. לכן $m^*(A)$ הוא inf של יותר מספרים מ$m^*(B)$ ומתקיים $m^*(A) \leq m^*(B)$.

משפט 2

אם $E \subset \mathbb{R}$ קטע כלשהו אז אורך E= $|E| = m^*(E)$

הוכחה: תרגיל

משפט 3

אם (E_n) סדרת קבוצות ב$\mathbb{R}$ ואם $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, אזי $m^*(E) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$.

הוכחה

לכל n נוכל לבחור קטעים פתוחים $(I_{k,n})_{k=1}^{n}$ כך ש$E_n \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_{k,n}$, ו

$$m^*(E_n) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |I_{k,n}| \leq m^*(E_n) + \varepsilon/2^n$$

לפי זה הקטעים $(I_{k,n})_{k,n=1}^{\infty}$ מהווים כיסוי פתוח ל$E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, לכן

$$m^*(E) \leq \sum_{k,n=1}^{\infty} |I_{k,n}| = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) + \varepsilon/2^n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)\right) + \varepsilon$$

הדבר נכון לכל $\varepsilon > 0$, ולכן בהכרח $m^*(E) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$. ■

הגדרה

תהי $E \subset \mathbb{R}$ קבוצה כלשהי. הזזה של E היא קבוצה מהסוג

$$x_0 + E = E + x_0 = \{x_0 + y | y \in E\}$$

כאשר $x_0 \in \mathbb{R}$ מספר קבוע.

משפט 4

תהי $E \subset \mathbb{R}$ ו$x_0 \in \mathbb{R}$ מספר כלשהו. אזי

$$m^*(x_0 + E) = m^*(E)$$

ז.א., m^* שמורה תחת הזזה.

הוכחה

אם E מכוסה ע"י $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$, אז x_0+E מכוסה ע"י $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(x_0+I_n)$. וכיוון ש$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|I_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_0+I_n|$, נקבל ש$m^*(E)=m^*(x_0+E)$. ■

תכונות רצויות למידה m על $\mathbb{R}$

(א) לכל $E \subset \mathbb{R}$, $m(E)$ מוגדרת ומקיימת $0 \le m(E) \le \infty$.

(ב) לכל קטע $E \subset \mathbb{R}$, $m(E)=|E|$.

(ג) m שמורה תחת הזזה.

(ד) אם $E=\biguplus\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ אז $m(E)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(E_n)$.

נובע מתכונות אלה:

(ה) אם $E \subset F \subset \mathbb{R}$ אזי $m(E) \le m(F)$.

נוכיח (ע"פ אקסיומת הבחירה) שאי אפשר להגדיר מידה m על $\mathbb{R}$ שתקיים את תכונות א,ב,ג,ד כולן.

ובכן, נניח שקיימת m כזאת ונגיע לסתירה.

תחילה נגדיר יחס שקילות על $\mathbb{R}$ - $x \sim y$ אם $x-y \in \mathbb{Q}$. אז יחס זה מחלק את $\mathbb{R}$ למספר לא מני של מחלקות שקילות.

פשוט שכל מחלקת שקילות חותכת את הקטע $(0,1)$.

לפי אקסיומת הבחירה קיימת קבוצה $E \subset (0,1)$ שמכילה **בדיוק** נציג אחד מכל מחלקת שקילות.

שתי טענות פשוטות:

(א) אם $x \in (0,1)$ אז קיים $r \in \mathbb{Q} \wedge (-1,1)$ כך $x \in E+r$.

(ב) אם $s \neq r$ שייכים ל$\mathbb{Q}$, אז $(E+r)\cap(E+s)=\emptyset$.

הוכחות: (א) אם $x \in (0,1)$ אז קיים $y \in E$ יחיד כך ש$y \sim x$, ז.א. $x-y=r \in \mathbb{Q}$, וממילא $x=y+r \in E+r$, וכיוון שx וy שייכים ל$(0,1)$, אז $r=x-y \in (-1,1)$ והוכחנו א'.

(ב) נניח ש$x \in (E+r)\cap(E+s)$, אזי קיימים $y,z \in E$ כך ש$x= y+r=z+s$. מכאן ש$y-z=\underbrace{s-r}_{x_0} \in \mathbb{Q}$. נובע ש$z \sim y$ וכיוון ששניהם שייכים לE הגענו לסתירה לזה שE מכילה רק איבר אחד מכל מחלקת שקילות. הסתירה מוכיחה ש$(E+r)\cap(E+s)=\emptyset$ כדרוש.

כעת, נרשום את כל הרציונלים ב$(-1,1)$ ע"י סדרה $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$. לפי (א), $(0,1)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E+r_n$, וכיוון ש$E\subset(0,1)$ וכל $r_n\in(-1,1)$ אז לכל n $E+r_n\subset(-1,2)$ וממילא $\bigcup_{n=1}^{\infty}E+r_n\subset(-1,2)$. בסיכום

$$(0,1)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E+r_n\subset(-1,2)$$

אם m מידה המקיימת (א) עד (ד) היא מקיימת (ה) ומתקיים(האיחוד זר בגלל (ב))

$$m\left[(0,1)\right]\leq m\left(\biguplus E+r_n\right)=m\left[(-1,2)\right]$$

לפי תכונה (ב)

$$1\leq m\left(\biguplus E+r_n\right)\leq 3$$

לפי (ד)

$$1\leq\sum_{n=1}^{\infty}m\left(E+r_n\right)\leq 3$$

כיוון שכל $E+r_n$ הזזה של E, תכונה (ד) אומרת שלכל n $m\left(E\right)=m\left(E+r_n\right)$ ולכן $1\leq\sum\limits_{n=1}^{\infty}m\left(E\right)\leq 3$ וזה בלתי אפשרי!

הוכחנו שאי אפשר לקיים את (א) עד (ד) כולן. כיוון שm^* מקיימת את (א),(ב) ו(ג) בהכרח היא לא מקיימת את (ד). ז.א. היא לא "σ-חיבורית".

למעשה אפשר להוכיח שקיים איחוד זר **סופי** $E=\biguplus_{k=1}^{n}E_k$ כך ש $m^*\left(E\right)\lneqq\sum_{k=1}^{n}$.

אבל לוותר על תכונה (ד) זה בלתי אפשרי. לכן החליטו לוותר על תכונה (א) ולהגדיר אוסף די גדול של קבוצות "הקבוצות המדידות של לבג" כך שהצמצום של m^* להן מקיים את (ד) (עם (ב) ו(ג)).

נאמץ את ההגדרה של Cartheodory:

הגדרה

תהי $E\subset\mathbb{R}$ קבוצה כלשהי. נאמר שE מדידה(לבג) אם לכל $A\subset\mathbb{R}$

$$m^*\left(A\right)=m^*\left(A\cap E\right)+m^*\left(A\cap E^{\complement}\right)$$

כאשר E^* = המשלים של E.

הערה

אם E וF מדידות ואם $E\cap F\neq\emptyset$ אז $m^*\left(E\cup F\right)=m^*\left(E\right)+m^*\left(F\right)$

הוכחת ההערה

נגדיר $A=E\uplus F$. לפי הגדרת המדידות של E

$$m^{*}\left(A\right)=m^{*}\left(A\cap E\right)+m^{*}\left(A\cap E^{\complement}\right)$$

ז.א.

$$m^{*}\left(E\uplus F\right)=m^{*}\left(E\right)+m^{*}\left(F\right)$$

$\blacksquare$

משפט 5

(א) $E\subset\mathbb{R}$ מדידה $\Longleftrightarrow$ $E^{\complement}$מדידה.

(ב) $E\subset\mathbb{R}$ מדידה $\Longleftrightarrow$ לכל $A\subset\mathbb{R}$,

$$m^{*}\left(A\right)\geq m^{*}\left(A\cap E\right)+m^{*}\left(A\cap E^{\complement}\right)$$

(ג) אם $m^{*}\left(E\right)=0$ אז E מדידה.

(ד) אם E מדידה אז לכל $x_{0}\in\mathbb{R}$, $E+x_{0}$ מדידה.

הוכחה

(א) תחילה נניח שE מדידה. לכן עבור כל $A\subset\mathbb{R}$

$$m^{*}\left(A\right)=m^{*}\left(A\cap E^{\complement}\right)+m^{*}\left(A\cap E\right)=m^{*}\left(A\cap E^{\complement}\right)+m^{*}\left(A\cap\left(E^{\complement}\right)^{\complement}\right)$$

כיוון שזה נכון לכל $A\subset\mathbb{R}$, $E^{\complement}$ מדידה. הכיוון ההפוך זהה.

(ב) תמיד $A=\left(A\cap E\right)\cup\left(A\cap E^{\complement}\right)$, לכן לפי משפט שהוכחנו $m^{*}\left(A\right)\leq m^{*}\left(A\cap E\right)+m^{*}\left(A\cap E^{\complement}\right)$. לכן, כדי להוכיח ש$E$ מדידה, הכרחי ומספיק לקיים את אי השוויון ההפוך

$$m^{*}\left(A\right)\geq m^{*}\left(A\cap E\right)+m^{*}\left(A\cap E^{\complement}\right)$$

לכל $A\subset\mathbb{R}$ וזה (ב)

(ג) נתון ש$m^*(E)=0$. כעת אם $A\subset\mathbb{R}$ כדשהי הרי $A\cap E\subset E$, ולכן לפי משפט 1

$$m^*(A\cap E)\le m^*(E)=0$$

לכן $m^*(A\cap E)=0$. יתר על כן $A\cap E^{\complement}\subset A$ ולכן $m^*(A)\ge m^*\left(A\cap E^{\complement}\right)$. נובע:

$$m^*(A)\ge m^*\left(A\cap E^{\complement}\right)+0=m^*\left(A\cap E^{\complement}\right)+m^*(A\cap E)$$

וע"פ סעיף ב' הוכחנו שE מדידה.

(ד) נתון שE מדידה ו$x_0\in\mathbb{R}$. צ"ל $E+x_0$ מדידה. ניקח $A\subset\mathbb{R}$ כלשהי. כעת:

$$m^*(A)=m^*(A-x_0)=m^*((A-x_0)\cap E)+m^*\left((A-x_0)\cap E^{\complement}\right)$$

כי E מדידה, וזה שווה ל

$$m^*(A\cap(E+x_0))+m^*\left(A\cap\left(E^{\complement}+x_0\right)\right)=$$

$$=m^*(A\cap(E+x_0))+m^*\left(A\cap(E+x_0)^{\complement}\right)$$

ולכן $E+x_0$ מדידה.

$\blacksquare$

משפט 6

כל קטע מהסוג $E=(a,\infty)$ (עבור $a\in\mathbb{R}$) קבוצה מדידה.

הוכחה

ניקח $A\subset\mathbb{R}$ כלשהי ונגדיר

$$\begin{aligned}A_1&=A\cap(a,\infty)=A\cap E\\A_2&=A\cap(-\infty,a]=A\cap E^{\complement}\end{aligned}$$

צ"ל ש$m^*(A)\ge m^*(A_1)+m^*(A_2)$.

לצורך זה יהי $\varepsilon>0$ נתון. לפי הגדרת m^* יש כיסוי פתוח $A\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}I_n$ כך ש $m^*(A)\le$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|I_n|\le m^*(A)+\varepsilon$.

לכל n נחלק $I_n=I_n'\cup I_n''$, כאשר

$$\begin{aligned}I_n'&=I_n\cap(a,\infty)\\I_n''&=I_n\cap(-\infty,a]\end{aligned}$$

$$m^*\left(A_1+m^*\left(A_2\right)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left|I_n'\right|+\sum_{n=1}^{\infty}\left|I_n''\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|I_n'\right|+\left|I_n''\right|\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left|I_n\right| = m^*\left(A\right)+\epsilon$$

הדבר נכון לכל $\varepsilon > 0$ ולכן

$$m^*\left(A\right) \geq m^*\left(A_1\right)+m^*\left(A_2\right)$$

ומכאן ש$E = (a,\infty)$ קבוצה מדידה.

■