אלגברה לינארית 2 (88113) – פתרון מבחן לדוגמה
פרופ' רון עדין

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
אין להשתמש בשום חומר עזר, כולל מחשבון.
יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות, כל שאלה בעמוד נפרד. כל השאלות שוות משקל.
ניתן לסמן עמודים כ"טיוטה".
נא להסביר ולנמק בבירור את כל הפתרונות.

בהצלחה!

.1

א. הגדירו: הצגה של העתקה לינארית ביחס לזוג בסיסים.

ב. תהי $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ העתקה לינארית המיוצגת, ביחס לבסיסים הסטנדרטיים של $\mathbb{R}^3$ ושל $\mathbb{R}^2$, על ידי המטריצה

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$$

מצאו את $\ker T$ ואת $\operatorname{im} T$.

$\ker T=\operatorname{span}\{(1,-2,1)\},\quad \operatorname{im} T=\mathbb{R}^2$

ג. האם קיימים בסיסים של $\mathbb{R}^3$ ושל $\mathbb{R}^2$ שביחס אליהם T מהסעיף הקודם מיוצגת על ידי המטריצה $B=\begin{pmatrix}7&8&9\\0&0&0\end{pmatrix}$? נמקו.

לא, כי $\operatorname{rank} A=2\neq 1=\operatorname{rank} B$.

.2

א. הגדירו: ערך עצמי, וקטור עצמי (של מטריצה).

ב. נסמן ב- $\sigma(A)$ את הספקטרום (קבוצת הערכים העצמיים) של מטריצה ריבועית A. הוכיחו, לכל $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$: $\sigma(AB)=\sigma(BA)$. התייחסו במפורש למקרה של ערך עצמי 0.

אם $0=\lambda\in\sigma(AB)$ אז AB לא הפיכה, ולכן לפחות אחת מהמטריצות B,A לא הפיכה, ולכן גם $0=\lambda\in\sigma(BA)$. אם $0\neq\lambda\in\sigma(AB)$ אז $ABv=\lambda v$ עבור וקטור עצמי מתאים $v\neq\vec{0}$, ולכן גם $BABv=\lambda Bv$. הוקטור $Bv\neq\vec{0}$ (אחרת גם $\lambda v=ABv=\vec{0}$ בניגוד להנחה $\lambda\neq 0$), ולפיכך השוויון $(BA)Bv=\lambda Bv$ מוכיח כי $\lambda\in\sigma(BA)$. הוכחנו עד כה כי $\sigma(AB)\subseteq\sigma(BA)$, והחלפת תפקידי B,A מוכיחה את ההכלה בכיוון ההפוך.

ג. תנו דוגמה של מטריצות B,A כך ש- $AB=0$ אבל $BA\neq 0$. הסבירו מדוע דוגמה זו אינה סותרת את הטענה בסעיף הקודם.

למשל: $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$. כאן $BA=A\neq 0=AB$. אין סתירה לסעיף הקודם, כי באמת הערך העצמי היחיד של BA הוא 0 למרות שאיננה מטריצת האפס (היא בלוק ז'ורדן).

.3

א. הגדירו: קבוצה אורתונורמלית, תת-מרחב ניצב.

ב. מצאו בסיס אורתונורמלי $\{e_1, e_2, e_3\}$ של $\mathbb{R}^3$ (עם המכפלה הסקלרית הרגילה) כך ש-:
$$\operatorname{span}\{e_1\} = \operatorname{span}\{(1,0,1)\}, \quad \operatorname{span}\{e_1, e_2\} = \left(\operatorname{span}\{(1,1,-1)\}\right)^{\perp}$$

בפירוט: נירמול $(1,0,1)$ נותן $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$. פתרון משוואה לינארית נותן $\left(\operatorname{span}\{(1,1,-1)\}\right)^{\perp} = \{(x,y,z) \mid x+y-z=0\} = \operatorname{span}\{(-1,1,0),(1,0,1)\}$.
הוקטור השני כאן הוא כפולה של e_1. תהליך גרם-שמידט על הוקטור הראשון נותן $\left(\frac{-1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) = (-1,1,0) - \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$, ואחרי נירמול: $e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1)$. הדרך הרגילה למציאת e_3 היא לבחור וקטור כלשהו מחוץ ל- $\operatorname{span}\{e_1, e_2\}$ ולהפעיל עליו תהליך גרם-שמידט; אולם כאן כבר נתון שהוקטורים e_1, e_2 ניצבים לוקטור $(1,1,-1)$ ולכן פשוט $e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$. כדאי לבדוק שאכן מתקבלת קבוצה אורתונורמלית, שהיא כמובן בסיס.

.4 תהי $q(x,y) = x^2 - 6xy + 9y^2$ תבנית ריבועית מעל $\mathbb{R}$.

א. מצאו עבור $q(x,y)$ מטריצה מייצגת סימטרית A.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$$

ב. מצאו מטריצה אלכסונית הדומה אורתוגונלית ל- A.
פ"א $x^2 - 10x$. A סימטרית ולכן ניתנת ללכסון אורתוגונלי ל- $B = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ג. תארו במילים את אוסף הפתרונות של המשוואה $q(x,y) = 5$ (למשל: אליפסה, פרבולה, זוג ישרים נחתכים וכו'). נמקו.
המשוואה היא $(x-3y)^2 = 5$, ומתארת שני ישרים מקבילים: $x - 3y = \pm\sqrt{5}$.

.5

א. הגדירו: אופרטור הרמיטי, אנטי-הרמיטי, אוניטרי.

ב. יהיו: V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$, $T: V \to V$ אופרטור אנטי-הרמיטי. הוכיחו: כל ערך עצמי של T הוא מדומה טהור.
אם $Tv = \lambda v$ כאשר $v \neq \vec{0}$ אז $\langle Tv, v\rangle = \langle v, T^* v\rangle = \langle v, -Tv\rangle = -\overline{\langle Tv, v\rangle}$, כלומר $\operatorname{Re}\langle Tv, v\rangle = 0$. לכן $\langle Tv, v\rangle = \lambda < v, v >$ מדומה טהור, ולכן גם λ.

ג. עבור T כמו בסעיף הקודם נגדיר: $S = (I-T)^{-1}(I+T)$. הוכיחו: S אופרטור אוניטרי.
$SS^* = (I-T)^{-1}(I+T)(I+T^*)(I-T^*)^{-1} = (I-T)^{-1}(I+T)(I-T)(I+T)^{-1} = I$ כי $I+T, I-T$ מתחלפים. לכן S אוניטרי.