אנליזה מודרנית תש"ף - תרגול 3

13 בנובמבר 2019

הגדרה: יהי (X,S) מרחב מדיד, כלומר קבוצה X ומעליה σ-אלגברה S. מידה (חיובית) על (X,S) היא פונקציה $\mu : S \to [0,\infty]$ המקיימת:

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. σ-אדיטיביות: אם $\{E_n\}$ קבוצות ב-S זרות בזוגות אז $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

השלשה הסדורה (X,S,μ) תיקרא מרחב מידה חיובית.

דוגמה: $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m)$ הוא מרחב מידה חיובית. ראינו בהרצאה כי m היא σ-אדיטיבית על הקבוצות המדידות לבג.

דוגמה: נתבונן בקבוצת הטבעיים $\mathbb{N}$. נוכל להגדיר σ-אלגברת בורל מעל הטופולוגיה הדיסקרטית, כלומר $\mathcal{B}(\mathbb{N}) = \mathbb{P}(\mathbb{N})$. נגדיר את מידת הספירה $\#(A) = |A|$. אז $(\mathbb{N},\mathbb{P}(\mathbb{N}),\#)$ הוא מרחב מידה חיובית.

תכונות המידה:

1. מונוטוניות: אם $A \subseteq B \subseteq S$ אז $\mu(A) \le \mu(B)$.
2. σ-תת-אדיטיביות: עבור $\{E_n\} \subseteq S$ לאו דווקא זרות בזוגות, $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.
3. רציפות עולה: תהיינה $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$ סדרת קבוצות עולה ב-S. אז $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$.
4. רציפות יורדת: תהיינה $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots$ סדרת קבוצות יורדת ב-S, כך ש-$\mu(E_1) < \infty$. אז $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$.

הוכחה: את שתי התכונות הראשונות ראינו בהרצאה. נוכיח רציפות עולה. תהיינה $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$ סדרה עולה של קבוצות מדידות ב-S. נסמן $E_0 = \emptyset$. נשים לב כי $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \backslash E_{n-1})$, כעת אלו קבוצות זרות ולכן מ-σ-אדיטיביות,

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \backslash E_{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n \backslash E_{n-1}) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \mu(E_n \backslash E_{n-1}) = \lim_{k\to\infty} \mu(\bigcup_{n=1}^{k} E_n \backslash E_{n-1}) = \lim_{k\to\infty} \mu(E_k)$$

כלומר $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{k\to\infty} \mu(E_k)$. כעת נוכל להוכיח רציפות יורדת. תהיינה $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots$ סדרת קבוצות מדידות יורדת ב-S. ידוע לנו כי $\mu(E_1) < \infty$. נגדיר

$B_k = E_1 \backslash E_k$. קיבלנו סדרה עולה $\{B_k\}$, וכן מתקיים $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_k = E_1 \backslash \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$. מרציפות עולה נקבל

$$\mu(E_1) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_k\right) + \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_k) + \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right)$$

מאדיטיביות המידה, לכל A, B מדידות מתקיים $\mu(A \backslash B) = \mu(A) - \mu(A \cap B)$. אצלנו E_1 מכילה כל E_k ולכן

$$\lim_{k\to\infty} \mu(B_k) = \lim_{k\to\infty} (\mu(E_1) - \mu(E_k)) = \mu(E_1) - \lim_{k\to\infty} \mu(E_k)$$

נחסר את $\mu(E_1)$ משני אגפי המשוואה ונקבל $\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(E_k)$.

דוגמה: נראה שברציפות יורדת, התנאי על חסימות המידה הוא הכרחי. ניקח $\mu = m$ מידת לבג, ונתבונן בקבוצות $E_n = [n, \infty]$. קל לראות כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$, ולכן מ־$\sigma$־אדיטיביות נקבל $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu(\emptyset) = 0$. מצד שני, לכל n טבעי $\mu(E_n) = \mu([n, \infty]) = \infty$, ולכן $0 = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) \neq \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \infty$.

תרגיל: תהי S σ־אלגברה מעל קבוצה X ותהי $B \in S$ מדידה. נגדיר $S_B = \{E \mid \exists A \in S : E = A \cap B\}$. הוכיחו כי (B, S_B) מרחב מדיד.

פתרון: נוכיח כי S_B σ־אלגברה מעל B. $\emptyset \in S$ כי S היא σ־אלגברה ולכן $\emptyset = \emptyset \cap B \in S_B$. תהי $E \in S_B$. נוכיח כי $B \backslash E \in S_B$ (שימו לב שהמשלים הוא ביחס ל־B). אם כן, קיימת $A \in S$ כך ש־$E = A \cap B$. אז $A^c \in S$ ולכן

$$A^c \cap B = (X \backslash A) \cap B = (X \cap B) \backslash (A \cap B) = B \backslash E \in S_B$$

נותר להוכיח סגירות לאיחוד בן־מניה. תהי $\{E_n\} \in S_B$ סדרת קבוצות. אז לכל E_n קיימת $A_n \in S$ כך ש־$E_n = A_n \cap B$. מסגירות לאיחוד בן מניה $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in S$, לכן $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap B = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in S_B$. הוכחנו כי S_B מכילה את הקבוצה הריקה, סגורה למשלים ולאיחוד בן־מניה, ולכן היא σ־אלגברה מעל B.

תרגיל: יהי (X, S, μ) מרחב מידה חיובית, ותהי $B \in S$. נגדיר $\nu(A) = \mu(A \cap B)$ לכל $A \in S$. הוכיחו כי ν היא מידה חיובית.

פתרון: נבדוק ש־ν מקיימת את הגדרת המידה. ברור כי $\nu(A) = \mu(A \cap B) \geq 0$ וכן $\nu(\emptyset) = \mu(\emptyset \cap B) = \mu(\emptyset) = 0$. נותר להוכיח כי ν היא σ־אדיטיבית. תהי $\{E_n\}$ סדרת קבוצות מדידות זרות. אז גם $\{E_n \cap B\}$ מדידות וזרות, ולכן

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \cap B\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \cap B\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n \cap B) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$$

תרגיל: יהי (X, S) מרחב מדיד. תהי $\mu : S \to \mathbb{R}$ פונקציה אי־שלילית ואדיטיבית (סופית) המקיימת $\mu(\emptyset) = 0$. נניח שלכל סדרה עולה $\{A_n\}$ של קבוצות מדידות מתקיים $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$. הוכיחו כי μ היא מידה.

פתרון: התנאי היחיד שנותר להוכיח הוא σ־אדיטיביות. תהי $\{E_n\}$ סדרת קבוצות מדידות זרות בזוגות. נגדיר סדרה חדשה $F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. זו סדרה עולה, המקיימת $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. מהאדיטיביות הסופית של μ, מתקיים $\mu(F_n) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k)$. לכן

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

וקיבלנו ש־μ היא אכן מידה.

הגדרה: יהי (X,S) מרחב מדיד ותהי $f : X \to \mathbb{R}$ פונקציה. נאמר ש־f מדידה אם לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ מתקיים $\{x \in X \mid f(x) > \alpha\} \in S$ או $\{x \in X \mid f(x) \geq \alpha\} \in S$ או $\{x \in X \mid f(x) < \alpha\} \in S$ או $\{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\} \in S$. ראינו בהרצאה שאלו תנאים שקולים.

תרגיל: תהי f פונקציה בעלת תחום מדיד D. נגדיר פונקציה g לפי $g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D \\ 0 & x \notin D \end{cases}$.
הוכיחו כי f מדידה אם ורק אם g מדידה.

פתרון: אם g מדידה אז גם $f = g|_D$ מדידה, במרחב המידה (D, S_D). נניח כי f מדידה. יהי $\alpha \in \mathbb{R}$. אם $\alpha \geq 0$, אז $\{x \mid g(x) > \alpha\} = \{x \mid f(x) > \alpha\} \in S$, כי אם ידוע ש־$g(x) > \alpha$ אז בהכרח $x \in D$. אחרת, $\alpha < 0$ ואז $\{x \mid g(x) > \alpha\} = D^c \cup \{x \mid f(x) > \alpha\} \in S$, כי אם $x \notin D$ אז $g(x) = 0 > \alpha$. (נזכור כי $D \in S$ ולכן גם $D^c \in S$). סך הכל קיבלנו כי g מדידה.