תרגיל מס 2 - אינפי 4 תשע"ח

8 באפריל 2018

1. המטרה של התרגיל הבא היא, באופן אינטואיטיבי להראות שהרבה פעמים אין תלות בפרמטריזציה כאשר אנחנו בוחרים לייצג עקומה.
תהי Γ עקומה פשוטה, חלקה ולא סגורה. (ז.א. אומרת שקיימת לה פרמטריזציה $\gamma:[a,b]\to\Gamma$ שהיא חלקה וחח"ע). בהינתן $\gamma:[a,b]\to\Gamma$ פרמטריזציה, נגדיר את האוריינטציה המושרית על ידי γבאופן הבא:

$$.T_{\gamma}\left(x\right)=\frac{\gamma'\left(t\right)}{\left|\gamma'\left(t\right)\right|}$$

(שימו לב, $||$ כאן מסמן את הנורמה הסטנדרטית ולא ערך מוחלט).

   (א) הוכיחו ש T מוגדרת היטב.

   (ב) תהי $\tilde{\gamma}:[c,d]\to\Gamma$ פרמטריזציה חלקה ושקולה ל γ. הראו ש $T_{\tilde{\gamma}}=T_{\gamma}$.

   (ג) תהי $\tilde{\gamma}:[c,d]\to\Gamma$ פרמטריזציה חלקה כך ש $\gamma\left(a\right)=\tilde{\gamma(d)}$ ו $\gamma\left(d\right)=\gamma\tilde{\left(b\right)}$.

      i. הראו ש $\gamma^{-1}\circ\tilde{\gamma}:[c,d]\to[a,b]$ היא פונקציה רציפה ומונטונונית עולה.

      ii. הראו ש $\gamma^{-1}\circ\tilde{\gamma}:[c,d]\to[a,b]$ היא פונקציה גזירה ברציפות.

      iii. הסיקו ש γ ו $\tilde{\gamma}$ שקולות.

   (ד) $\tilde{\gamma}:[c,d]\to\Gamma$ פרמטריזציה חלקה כך ש $\gamma\left(a\right)=\gamma\tilde{\left(c\right)}$ כך ש $\gamma\left(a\right)=\tilde{\gamma}\left(d\right)$ ו $\gamma\left(b\right)=\gamma\tilde{\left(c\right)}$. הראו ש $T_{\gamma}=-T_{\tilde{\gamma}}$.

   (ה) הסיקו שלעקומה חלקה פשוטה ולא סגורה קיימות בדיוק שתי פרמטריזציות חלקות עד כדי שקילות.

   (ו) הראו ששתי עקומות פשוטות,חלקות וחח"ע הן שקולות אם ורק אם יש הן משרות את אותה האוריינטציה.

2. חשבו את האינטרגלים הבאים:

   (א) $\int_{\gamma}\left(2x+y+z\right)$ כאשר $\gamma\left(t\right)=\left(t+1.t+2,3\right)$ עבור $t\in[0,2]$.

   (ב) $\int_{\Gamma}\sqrt{x^{2}+y^{2}}$ כאשר $\Gamma=\left\{ \left(x,y\right)|x^{2}+y^{2}=4x\right\}$.

   (ג) $\int_{\Gamma}xyz\mathbf{d}l$ כאשר $\Gamma=\left\{ \left(x,y,z\right)|x=t,y=\frac{1}{3}\sqrt{8t^{3}},z=\frac{1}{2}t^{2},0\leq t\leq1\right\}$.

3. נתון קפיץ על ידי $\gamma\left(t\right)=\left(\cos t,\sin t,3t\right)$ כך שצפיפות המסה בנקודה $\left(x,y,z\right)=x^{2}+y^{2}+z^{2}$. חשבו את מסת הקפיץ אם נתון שקצה אחד שלו נמצא ב $\left(1,0,0\right)$ ואורכו הוא $\sqrt{360\pi}$.

4. תהי $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ מסילה בעלת אורך עם התמונה Γ. תהי f פונקציה המוגדרת על Γ עבורה האינטגרל $\int_\gamma f\mathbf{d}l$ קיים.

(א) הראו כי f חסומה.

(ב) יהי M חסם של f. הוכיחו שמתקיים $\left|\int_\gamma f\mathbf{d}l\right| \leq ML(\gamma)$.

הדרכה (לשני הסעיפים): עבדו עם ההגדרה $\int_\gamma f\mathbf{d}l$ כגבול של סכומי רימן.

5. תהיינה $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ ו $\phi : [a,b] \to [c,d]$ כך ש $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \phi$. כמו כן נתון כי ϕ רציפה, חח"ע על ומונוטונית עולה וגם ש ϕ^{-1} גם רציפה (אמנם לא נתון ש ϕ גזירה ולכן לא ניתן להסיק כי γ_1 ו γ_2 שקולות. הוכיחו שלכל f המוגדרת על תמונה של γ_1 ו γ_2 האינטגרל $\int_{\gamma_1} f\mathbf{d}l$ קיים אם ורק אם $\int_{\gamma_2} f\mathbf{d}l$ קיים ויש שוויון בינהם.

הדרכה: השתמשו בהגדרה של אינטגרל כגבול של סכומי רימן והראו שלכל סכום רימן המתאים לעקומה אחת קיים סכום רימן שמתאים לעקומה השניה בעל אותו ערך בדיוק.

6. עבור כל אחת מהתבניות הבאות קבעו אם היא מדויקת בתחום הנתון. במידה וכן, מצאו את פונקציית הפוטנציאל של השדה המתאים.

(א) $\omega(x,y) = e^{x-y}(1+x+y)\,\mathbf{d}x + e^{x-y}(1-x-y)\,\mathbf{d}y$ בכל $\mathbb{R}^2$.

(ב) $\omega(x,y) = \frac{y^2}{1+x^2+y^2}\mathbf{d}x + \frac{y}{1+x^2+y^2}\mathbf{d}y$ בכל $\mathbb{R}^2$.

(ג) $\omega(x,y) = -\frac{y^2}{(x-y)^2}\mathbf{d}x + \frac{x^2}{(x-y)^2}\mathbf{d}y$ ב $\{(x,y) : x > y\}$.

(ד) $\omega(x,y) = \frac{2y}{(x+y)}\mathbf{d}x - \frac{2x}{(x+y)}\mathbf{d}y$ ב $\{(x,y) : x > -y\}$.

(ה) $\omega(x,y) = \frac{(x-y)}{x^2+y^2}\mathbf{d}x + \frac{(x+y)}{x^2+y^2}\mathbf{d}y$ ב $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

7. חשבו את האינטגרלים הבאים:

(א) $\int_\Gamma -\frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{d}x + \frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{d}y$ כאשר Γ היא השפה של הריבוע $ABCD$

$$A = (1,0)\,,\ B = (0,1)\,,\ C = (-1,0)\,,\ D = (0,-1)$$

נגד כיוון השעון.

(ב) $\int_\Gamma -\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{d}y$ כאשר

$$\Gamma = \left\{(x,y) : (x-2)^2 + (y-3)^2 = 1\right\}$$

נגד כיוון השעון.

(ג) $\int_\Gamma y^3z^2\mathbf{d}x + \left(x^2+y^2+z^2\right)\mathbf{d}y + z\mathbf{d}z$ כאשר

$$\Gamma = \left\{(x,y,z) : y^2+z^2 = 4, x = 0, z < 0\right\}$$

נגד כיוון השעון אם מסתכלים מהכיוון החיובי של ציר ה x.

(ד) $\int_\Gamma x^2\mathbf{d}x + y^2\mathbf{d}y$ כאשר $\Gamma = \left\{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$ נגד כיוון העשון.

8. הוכיחו שאם $\|F(x)\| \leq M$ עבור שדה F, Γ פשוטה, אזי לכל פרמטריזציה γ של Γ מתקיים

$$\left|\int_{\Gamma} f \mathbf{d}\gamma\right| \leq ML(\Gamma).$$