

פונקציות מרוכבות

תרגיל בית מס' 1

תאריך הגשה: 21/10/10

1. צייר את הקבוצות:

א. $D_1 = \{z \mid |z-1| > |z+i|\}$

ב. $D_2 = \{z \mid |z-1+i| \leq 2\}$

2. על סמך הזהות $1+z+z^2+\dots+z^n = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$ ($z \neq 1$), הוכח כי

$$\frac{1}{2} + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \dots + \cos(n\theta) = \frac{\sin(n+1/2)\theta}{2\sin(\theta/2)}$$

3. עבור $z = 1+2i$, מצא (בצורה של $a+ib$, ללא שימוש בנוסחת דה-מואבר):

א. z^n

ב. $\frac{1}{z}$

ג. $\frac{1}{z^n}$

ד. $z^2 + 2z + 5 + i$

4. הוכח כי לכל $z \in \mathbb{C}$ $|z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| \leq \sqrt{2} \cdot |z|$

5. הוכח שמתקיים $\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| < 1$ עבור $a, b \in \mathbb{C}$ המקיימים $|a| < 1$ ו- $|b| < 1$.

6. מצא:

א. $\sqrt[3]{i}$

ב. $\sqrt[5]{1-i}$

ג. $\sqrt{3-i}$

ד. $\sqrt[4]{-1}$

7. בהשתמש בזהות: $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, מצא:

א. $\cos(\pi/16)$

ב. $\sin(\pi/16)$