תרגול 2

הגדרה: נסמן $C_0=[0,1]$, ולכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר את C_{n+1} להיות C_n לאחר שמורידים מכל קטע בו את השליש האמצעי (הפתוח) ע"י הנוסחה $C_{n+1}=\frac{C_n}{3}\cup\left(\frac{C_n}{3}+\frac{2}{3}\right)$. קבוצת קנטור מוגדרת כחיתוך של כל ה- C_n : $C:=\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n$. (כל C_n הוא איחוד של 2^n קטעים סגורים שאורכם $\frac{1}{3^n}$.

[לצייר ציור!]

1. תכונות:

א. C קומפקטית.

ב. יהי $x\in[0,1]$, אם נציג את x בבסיס טרנארי (3) $x=0.x_1x_2x_3...$ (כלומר $x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{3^n}$) אזי נקבל כי $x\in C\Leftrightarrow$ לכל $n\in\mathbb{N}$, הספרה ה-nית של x $x_n\equiv d_n(x)\equiv x$ היא 0 או 2.

ג. C אינה בת-מנייה.

ד. $m(C)=0$

ה. C לא מכילה שום קטע (בעל מידה חיובית)

ו. C אינה איחוד בן-מנייה של קטעים סגורים.

הוכחה:

א. מכיוון ש C_n הינה איחוד סופי של קטעים סגורים נקבל כי C_n קבוצה סגורה לכל $n\in\mathbb{N}$. מכאן שקבוצת קנטור $C:=\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n$ הינה סגורה כחיתוך של קבוצות סגורות. מכיוון ש $C\subset[0,1]$ אזי היא חסומה ועפ"י היינה בורל הינה קומפקטית.

ב. נוכיח $x\in C_n\Leftrightarrow x_1,x_2,...,x_n\in\{0,2\}$ באינדוקציה:

המקרה $n=1$:

$$x\in C_1 \Leftrightarrow x\in\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right]\Leftrightarrow x_1=0 \text{ or } x_1=2 \Leftrightarrow x_1\in\{0,2\}$$

נניח את נכונות הטענה עבור n כלשהו ונוכיח את נכונותה עבור $n+1$:

$(\Rightarrow)$

$$x\in C_{n+1}=\frac{C_n}{3}\cup\left(\frac{C_n}{3}+\frac{2}{3}\right)\Rightarrow x\in\frac{C_n}{3} \text{ or } x\in\left(\frac{C_n}{3}+\frac{2}{3}\right)\Rightarrow 3x\in C_n \text{ or } 3x-2\in C_n$$

ע"פ הנחת האינדוקציה, $d_n(3x)\in\{0,2\}$ או $d_n(3x-2)\in\{0,2\}$. אבל - $d_n(3x-2)=d_n(3x)=d_{n+1}(x)=x_{n+1}$. מספיק לשים לב כי $C_{n+1}\subseteq C_n$ כדי לראות שהטענה נכונה.

$(\Leftarrow)$

ידוע כי $x_1,x_2,...,x_n,x_{n+1}\in\{0,2\}$ ולכן ע"פ הנחת האינדוקציה $x\in C_n$. יש להוכיח כי $x\in C_{n+1}=\frac{C_n}{3}\cup\left(\frac{C_n}{3}+\frac{2}{3}\right)$, כלומר $3x\in C_n$ או $3x-2\in C_n$. ובכן:

אם $x_1=0$ נקבל $3x=0.x_2x_3...x_nx_{n+1}...\in C_n$,

ואם $x_1=2$ נקבל $3x-2=0.x_2x_3...x_nx_{n+1}...\in C_n$.

סיימנו את האינדוקציה. סה"כ $x\in C\Leftrightarrow x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N}\left(x\in C_n\right)\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N}\left(x_n\in\{0,2\}\right)$

מש"ל.

ג. עפ"י סעיף ב' יש התאמה בין סדרות של 0 ו 2 וקבוצת קנטור. כמו כן, יש התאמה בין סדרות של 0 ו 1 ל $\mathbb{R}$ ...

ד. לכל $N\in\mathbb{N}$, $C=\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n\subseteq C_N$ וע"פ מונוטוניות $0\le m(C)\le m(C_N)=2^N\frac{1}{3^N}$. נשאיף $N\to\infty$ לקבל את הדרוש.

ה. נניח בשלילה שקיים קטע $I\subseteq C$, עם מידה (אורך) $m(I)=\ell>0$. עפ"י המונוטוניות נקבל בסתירה ש

$$m(I)\le m(C)=0$$

ו. נניח בשלילה כי $C=\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ כאשר I_n קטעים סגורים. אזי כבר ראינו כי $m\left(I_n\right)=0$ ולכן בהכרח $I_n=\{x_n\}$, כלומר הקטעים הסגורים הינם נקודונים. אבל עפ"י סעיף ג' C איננה בת מנייה ומכאן סתירה.

תזכורת: תהי X קבוצה כלשהי. $S\subseteq P\left(X\right)$ הינה σ-אלגברה של קבוצות ב X אם מתקיימים התנאים הבאים:

i. $A\in S\Rightarrow A^c\in S$.

ii. $X\in S$.

iii. $\{E_n\}\in S\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\in S$

2. מצא דוגמא לקבוצה X ושתי סיגמא אלגברות S_1 ו S_2 , כל אחת מכילה תת קבוצות של X כך ש $S_1\cup S_2$ אינה סיגמא אלגברה.

פתרון: ניקח $X=\{1,2,3\}$, $S_1=\{\{1\},\{2,3\},\varnothing,\{1,2,3\}\}$ ו $S_2=\{\{1,2\},\{3\},\varnothing,\{1,2,3\}\}$. קל לראות כי S_1 ו S_2 הינן סיגמא אלגברות ואילו $S_1\cup S_2=\{\{1,2\},\{3,\},\{1\},\{2,3\},\varnothing,\{1,2,3,4\}\}$ אינה סיגמא אלגברה שכן $\{1,2\}\cap\{2,3\}\notin S_1\cup S_2$.

3. נניח כי $S_1\subset S_2\subseteq\cdots$ הינן סיגמא אלגברות המכילות תת קבוצות של X . האם $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ הינה סיגמא אלגברה? אם לא תן דוגמא נגדית.

פתרון: נבחר את X להיות כל הסדרות המקבלות 0 או 1 כלומר $X=\left\{\{x_i\}: x_i=0\vee x_i=1\right\}$. נגדיר את S_1 להיות הסיגמא אלגברה הנוצרת מהקבוצה $A_1=\left\{\{x_i\}:\{x_i\}\in X, x_1=1\right\}$. נגדיר את S_2 להיות הסיגמא אלגברה הנוצרת מ A_1 ו $A_2=\left\{\{x_i\}:\{x_i\}\in X, x_2=1\right\}$. באופן איטרטיבי נגדיר את S_{n+1} להיות הסיגמא אלגברה הנוצרת מכל הקבוצות ב S_n והקבוצה $A_{n+1}=\left\{\{x_i\}:\{x_i\}\in X, x_{n+1}=1\right\}$. אינטואיטיבית ניתן להבין זאת כך: בסיגמא אלגברה S_n ניתן להבדיל בין ה n איברים הראשונים של הסדרות ב X . ברור כי $S_1\subset S_2\subseteq\cdots$ שכן כך בנינו אותן. נגדיר $S=\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ ונראה כי $A=\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\notin S$. נניח בשלילה כי $A\in S$, אזי בהכרח כי $A\in S_n$ לאיזשהו $n\in\mathbb{N}$, אבל $A=\left\{(1,1,\ldots)\right\}$, כלומר A הינה קבוצה בעלת איבר אחד ואילו ב S_n כל הקבוצות הינן אינסופיות ולכן סתירה. מכאן ש S איננה סיגמא אלגברה.

4. הראו כי הסיגמא אלגברה הנוצרת ע"י הנקודונים ב $\mathbb{R}$ מוכלת ממש בסיגמא אלגברה בורל ב $\mathbb{R}$.

פתרון: נגדיר סיגמא אלגברה חדשה

$$S = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ is countable or } A^c \text{ is countable}\}$$

טענה: S הינה סיגמא אלגברה.

הוכחה: נבדוק תכונות

i. $\varnothing \in S \Rightarrow \mathbb{R} \in S$

ii. $A \in S \Rightarrow A \text{ is countable} \vee A^c \text{ is countable} \Rightarrow A^c \in S$

iii. נניח כי $\{A_n\} \in S$. אזי יתכנו 2 מקרים:

א. A_n בן מנייה לכל $n \in \mathbb{N}$. במקרה כזה ברור כי $\bigcup_n A_n$ הינה קבוצה בת מנייה ו $\bigcup_n A_n \in S$.

ב. אחת מהקבוצות A_n אינה בת מנייה נסמן אותה ב A_{n_0}. במקרה כזה $\left(\bigcup_n A_n\right)^c = \bigcap_n A_n^{\ c} = \bigcap_n A_n^{\ c} \cap A_{n_0}^{\ c}$ ולכן בת מנייה ולכן $\bigcup_n A_n \in S$.

מכאן קיבלנו ש S הינה סיגמא אלגברה.

כעת , נשים לב כי S מכילה את כל הנקודונים ב $\mathbb{R}$ ומכאן ש $\sigma(\{x \mid x \in \mathbb{R}\}) \subseteq S$. ברור כי $S \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ וסיימנו.

תזכורת: מידת לבג הינה הצימצום של מידת לבג החיצונית על הקבוצות המדידות. ע"י זה שאנו מצמצמים את התחום (הקבוצות שעליהן המידה מוגדרת) אנו מרוויחים את התכונה הבאה:

אם $\{E_n\}$ אוסף של קבוצות מדידות זרות אזי מתקיים

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n).$$

ראינו שעבור המידה החיצונית שמוגדרת על כל הקבוצות ב $\mathbb{R}$ תכונה זו לא מתקיימת תמיד.

בנוסף למידת לבג, ניתן להגדיר עוד מידות על $\mathbb{R}$. באופן יותר כללי, תהי S סיגמא אלגברה על קבוצה X , אזי μ מידה על S אם מתקיימות התכונות הבאות:

i. $\mu : S \to \mathbb{R}^+$.

ii. $\mu(\varnothing) = 0$.

iii. אם $\{E_n\}$ זרות ב S אזי $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

דוגמא: נסתכל על קבוצת המספרים הטבעיים $\mathbb{N}$. נגדיר סיגמא אלגברה בורל(ביחס לאיזה טופולוגיה?) על $\mathbb{N}$ להיות $\sigma(\mathbb{N}) = P(\mathbb{N})$. נגדיר את מידת הספירה להיות $\#(A) = |A|$.
קל לראות כי # הינה מידה.

אפשר להראות כי תכונות המידה הן:

i. $A, B \in S$ ו $A \subseteq B$ אזי $\mu(A) \le \mu(B)$.

ii. אם $A_i \in S$ אז $\mu\left(\bigcup_i A_i\right) \le \sum_i A_i$.

iii. אם $A_i \in S$ וגם $A_i \subseteq A_{i+1}$ אזי $\mu\left(\bigcup_i A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$.

iv. אם $A_i \in S$ וגם $A_i \supseteq A_{i+1}$ אזי אם $\mu(A_1) < \infty$ אז $\mu\left(\bigcap_i A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$.

5. מצאו דוגמא נגדית למקרה הרביעי. כלומר, הניחו שכל התנאים מתקיימים מלבד $\mu(A_1) = \infty$ והראו שמתקיים $\mu\left(\bigcap_i A_i\right) \ne \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$.

פתרון: תהי $\mu = m$, מידת לבג. נסתכל על הקבוצות הבאות $\mathrm{E}_n = [n, \infty)$. ברור כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \varnothing$ ולכן, עפ"י תכונה 2 של המידה נובע כי $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu(\varnothing) = 0$. מצד שני לכל n $\mu([n,\infty)) = \infty$ ולכן $0 = \mu\left(\bigcap_i A_i\right) \ne \lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \infty$.