תרגיל בית 7 אינפי 3

1. משטח נתון על ידי המשוואה $z = e^{-x^2-2y^2}$.

(א) מצאו $P = (x_0, y_0, z_0)$ נקודה על המשטח, כך שאם יניחו עליה כדור, הוא יתחיל לנוע בכיוון $(2,1,a)$ עבור a כלשהוא. מצאו גם את a.

פתרון. אנו יודעים שהכדור יתחיל לזוז לכיוון ההפוך לכיוון הגרדיאנט. היות ו

$$z = e^{-x^2-2y^2}$$

הגרדיאנט בנקודה (x_0, y_0) הוא

$$\nabla f(x_0,y_0) = (-2x_0 e^{-x_0^2-2y_0^2}, -4y_0 e^{-x_0^2-2y_0^2})$$

לכן הכדור יזוז לכיוון הנגדי כלומר:

$$(2x_0 e^{-x_0^2-2y_0^2}, 4y_0 e^{-x_0^2-2y_0^2})$$

אנו צריכים שכיוון זה יהיה בכיוון הוקטור $(2,1)$ וזה למשל קורה כאשר $y_0 = 1$ $x_0 = 4, \quad$ (זה יקרה בשביל כל נקודה (x_0, y_0) שבה $x_0 = 4y_0$). רכיב z של נקודה זו הוא:

$$z = e^{-16-2} = e^{-18}$$

לכן נקודה מתאימה על המשטח תהיה

$$(4, 1, e^{-18})$$

או כל נקודה מהצורה:

$$(4t, t, e^{-18t^2})$$

נותר לברר לאיזה כיוון ב $\mathbb{R}^3$ הכדור יפנה. הגרדיאנט של המשטח $e^{-x^2-2y^2} - z$ הוא

$$(-2x_0 e^{-x_0^2-2y_0^2}, -4y_0 e^{-x_0^2-2y_0^2}, -1)$$

ובנקודה $(4t, t, e^{-18t^2})$ הוא שווה ל

$$(-8te^{-18t^2}, -4te^{-18t^2}, -1)$$

אנחנו צריכים ש $(2,1,a)$ יהיה ניצב אליו. כלומר

$$-16te^{-18t^2} - 4te^{-18t^2} - a = 0$$

ולכן

$$a = -20te^{-18t^2}$$

למשל עבור הנקודה שבחרנו שבה $t = 1$ נקבל $a = -20e^{-18}$.

(ב) מצאו נקודה על המשטח שאם יניחו עליה את הכדור הוא לא יזוז לשום מקום.

זה כמובן יקרה כאשר הגרדיאנט יהיה 0 וזה קורה במקרה שלנו כאשר $x_0 = 0 \quad y_0 = 0 \quad z_0 = 1$.

2. נגדיר משטח על ידי

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$$

כאשר $0 < a \in \mathbb{R}$. בנקודה P כלשהיא שעל המשטח, מעבירים מישור משיק למשטח. מישור זה חותך את ציר x בנקודה P_x את ציר y בנקודה P_y ואת ציר z בנקודה P_z. (שימו לב ש $P_x, P_y, P_z \in \mathbb{R}^3$). הוכיחו כי $||P_x|| + ||P_y|| + ||P_z||$ הוא סכום קבוע שאינו תלוי בנקודה שבה העברנו מישור משיק. מצא סכום זה (כפרמטר של a).

פתרון. הגרדיאנט של המשטח הוא

$$(\frac{1}{2\sqrt{x}}, \frac{1}{2\sqrt{y}}, \frac{1}{2\sqrt{z}})$$

לכן המישור המשיק בנקודה כלשהיא $P = (x_0, y_0, z_0)$ הוא

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) + \frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y - y_0) + \frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z - z_0) = 0$$

כדי למצוא את נקודת החיתוך עם ציר x מציבים $y = z = 0$ ומקבלים

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) + \frac{1}{2\sqrt{y_0}}(0 - y_0) + \frac{1}{2\sqrt{z_0}}(0 - z_0) = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}x - \frac{\sqrt{x_0}}{2} - \frac{\sqrt{y_0}}{2} - \frac{\sqrt{z_0}}{2} = 0$$

נשים לב שבגלל ש (x_0, y_0, z_0) על המשטח, מתקיים $\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0} = \sqrt{a}$ ולכן

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}x = \frac{\sqrt{a}}{2}$$

$$x = \sqrt{a}\sqrt{x_0}$$

כלומר נקודת החיתוך עם ציר x היא $P_x = (\sqrt{a}\sqrt{x_0}, 0, 0)$. בדומה

$$P_y = (0, \sqrt{a}\sqrt{y_0}, 0), \quad P_z = (0, 0, \sqrt{a}\sqrt{z_0})$$

ולכן

$$||P_x|| + ||P_y|| + ||P_z|| = \sqrt{a}\sqrt{x_0} + \sqrt{a}\sqrt{y_0} + \sqrt{a}\sqrt{z_0} = a$$

3. תהי $f(u,v):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציה דיפרנציאבילית בכל המישור $\mathbb{R}^2$. נתון

$$\frac{\partial f}{\partial u}(7,1)=2,\quad \frac{\partial f}{\partial v}(7,1)=3$$

. נגדיר:

$$u(x,y)=2x+3y\quad v(x,y)=x-y$$

$$z(x,y)=f(u(x,y),v(x,y))$$

חשב את $\frac{\partial z}{\partial x}(2,1)$ ואת $\frac{\partial z}{\partial y}(2,1)$.

פתרון. שימוש פשוט בכלל השרשרת מראה ש

$$\frac{\partial z}{\partial x}(2,1)=\frac{\partial f}{\partial u}(7,1)\frac{\partial u}{\partial x}(2,1)+\frac{\partial f}{\partial v}(7,1)\frac{\partial v}{\partial x}(2,1)=2\cdot 2+3\cdot 1=7$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(2,1)=\frac{\partial f}{\partial u}(7,1)\frac{\partial u}{\partial y}(2,1)+\frac{\partial f}{\partial v}(7,1)\frac{\partial v}{\partial y}(2,1)=2\cdot 3+3\cdot(-1)=3$$

4. תהי $z(x,y)$ גזירה ברציפות לפי כל אחד מהמשתנים במישור הממשי. כתבו את הביטוי

$$x\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial x}$$

באמצעות קוארדינטות פולאריות. (כלומר $x=r\cos\varphi$ $y=r\sin\varphi$ כאשר $r\geq 0$ ו $0\leq\varphi<2\pi$)

(א) אם נהפוך את המשוואות של המשתנים הפולריים נקבל

$$\varphi=arctan\frac{y}{x}\quad r=\sqrt{x^2+y^2}$$

ולכן

$$\varphi_x^{'}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}(-\frac{y}{x^2})=\frac{-y}{x^2+y^2}\quad \varphi_y^{'}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}(\frac{1}{x})=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$r_x^{'}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\quad r_y^{'}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ולכן

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial\varphi}+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial\varphi}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial z}{\partial r}$$

ולכן

$$x\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial x}=x(\frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial\varphi}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial z}{\partial r})-y(\frac{-y}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial\varphi}+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial z}{\partial r})=$$
$$\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial\varphi}=\frac{\partial z}{\partial\varphi}$$

לכן התשובה היא

$$\frac{\partial z}{\partial\varphi}=0$$

5. תהי $f(x,y)$ פונקציה בעלת נגזרות חלקיות רציפות בקבוצה $D=\{(x,y)\mid x>0,y>0\}$. נתון כי קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש

$$xf'_x+yf'_y=nf$$

לכל $(x,y)\in D$. הוכיחו כי

$$f(tx,ty)=t^nf(x,y)$$

לכל $t>0$ ו $(x,y)\in D$.

הדרכה: הגדירו

$$F(t)=\frac{f(tx,ty)}{t^n}$$

והוכיחו כי F קבועה.

פתרון. נגזור את F לפי t

$$F'(t)=\frac{(f'_x(tx,ty)\cdot x+f'_y(tx,ty)\cdot y)t^n-nt^{n-1}f(tx,ty)}{t^{2n}}$$

לפי הנתון

$$f'_x(x,y)\cdot x+f'_y(x,y)\cdot y=nf(x,y)$$

ולכן

$$f'_x(tx,ty)\cdot tx+f'_y(tx,ty)\cdot ty=nf(tx,ty)$$

כלומר

$$f'_x(tx,ty)\cdot x+f'_y(tx,ty)\cdot y=\frac{n}{t}f(tx,ty)$$

אם נציב זאת בביטוי שקיבלנו קודם נקבל

$$F'(t)=\frac{(\frac{n}{t}f(tx,ty))t^n-nt^{n-1}f(tx,ty)}{t^{2n}}=0$$

כלומר

$$F(t) = c$$

בפרט

$$F(t) = F(1)$$

כלומר

$$\frac{f(tx, ty)}{t^n} = f(x, y)$$

ולכן

$$f(tx, ty) = tf(x, y)$$

כנדרש.