העתקה צמודה

הגדרה: יהיו $(V,\langle,\rangle_V),(W,\langle,\rangle_W)$ שני ממ"פ ו־$T:V\to W$. אזי קיימת העתקה לינארית יחידה $T^*:W\to V$ שמקיימת שלכל $v\in V, w\in W$

$$\langle T(v),w\rangle_W=\langle v,T^*(w)\rangle_V$$

דוגמא: דוגמא: $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, עם המ"פ הסטדנרטיות, המוגדרת ע"י $T(x,y)=(x+y,y)$. טענה: $T^*(x,y)=(x,x+y)$.

הוכחה: נקח $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ ונוכיח שמתקיים השוויון.

$$\langle T\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\rangle=\langle\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},T^*\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\rangle$$

$$\langle\begin{pmatrix}x_1+y_1\\y_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\rangle=(x_1+y_1)x_2+y_1y_2$$

$$\langle\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_2\\x_2+y_2\end{pmatrix}\rangle=x_1x_2+y_1(x_2+y_2)$$

קיבלנו שוויון.

תזכורת: תהי $A\in\mathbb{C}^{n\times m}$, אז $A^*=\overline{A}^t$.

הוכחתם בהרצאה: אם $T:\mathbb{C}^m\to\mathbb{C}^n$ עם המ"פ הסטדנרטית על שניהם מוגדרת ע"י

$$T(v)=Av$$

אז

$$T^*(v)=A^*v$$

טענה כללית: אם S,S' בסיסים או"נ של V,W , $T:V\to W$, בהתאמה, אזי: $[T^*]_S^{S'}=([T]_{S'}^S)^*$.

תכונות:

- $(T_1+T_2)^*=T_1^*+T_2^*$
- $(\alpha T)^*=\overline{\alpha}T^*$
- $(T_1T_2)^*=T_2^*T_1^*$
- $(T^*)^*=T$
- $\langle T^*(w),v\rangle=\langle w,T(v)\rangle$

1. תרגיל: נגדיר $V=\mathbb{R}^2$ עם המכפלה הפנימית $\left\langle\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right\rangle=2xx'+yy'$ ו $W=\mathbb{R}^2$ עם המכפלה הסקלארית. מצאו את ההעתקה הצמודה ל־$T(x,y)=(2x+3y,2y)$, $T:V\to W$.

פתרון: עבור W נקח $S' = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ זה בסיס או"נ, ועבור V $S = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$.

$$[T]_{S'}^{S} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$[T^*]_{S}^{S'} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$[T^* \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}]_S = [T^*]_S^{S'} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]_{S'} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}x \\ 3x+2y \end{pmatrix}$$

$$T^* \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{2}x \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} + (3x+2y) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x+2y \end{pmatrix}$$

1. תרגיל: הוכיחו: תהי $T : V \to V$ הע"ל, ו$U \le V$ תת מרחב T- אינוואריאנטי. אזי $U^\perp$ הוא T^* אינוואריאנטי.

פתרון: יהי $w \in U^\perp$. רוצים להוכיח ש$T^*(w) \in U^\perp$. יהי $u \in U$, צריך להוכיח ש$\langle T^*(w), u \rangle = 0$.

$$\langle T^*(w), u \rangle = \langle w, T(u) \rangle$$

ידוע שU הוא T אינווראינטי, ולכן $u \in U$ גורר ש$T(u) \in U$. ו$w \in U^\perp$. לכן

$$\langle w, T(u) \rangle = 0$$

קיבלנו ש

$$\langle T^*(w), u \rangle = 0$$

מש"ל.

תרגיל: תהי $T : V \to W$ הע"ל. אזי: $(Im(T))^\perp = \ker(T^*)$.

הוכחה: נעשה הכלה דו כיוונית.

$(Im(T))^\perp \supseteq \ker(T^*)$. יהי $v \in \ker T^*$. אז $T^*(v) = 0$. יהי $T(u) \in Im(T)$.

$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, T^*(v) \rangle = \langle u, 0 \rangle = 0$$

קיבלנו שv מאונך לכל הוקטורים בתמונה, כלומר $v \in (ImT)^\perp$.

$(Im(T))^\perp \subseteq \ker(T^*)$. יהי $w \in (ImT)^\perp$. אז לכל $v \in V$, $\langle w, T(v) \rangle = 0$. לכן $\langle T^*(w), v \rangle = 0$. T^*w מאונך לכל הוקטורים בV, ולכן הוא 0. כלומר, $w \in \ker T^*$.

הערה: באופן שקול:

1. $Im(T) = (\ker T^*)^\perp$
מתקבל ע"י הפעלת ניצב על שני האגפים.

2. $(ImT^*)^\perp = \ker T$
מתקבלת ע"י הצבת T^* במקום T. וידוע ש$T = (T^*)^*$.

מסקנה:

1. T על $\iff$ T^* חח"ע.

2. T חח"ע $\iff$ T^* על.

הוכחה: T^* חח"ע אמ"ם $\ker T^* = \{0\}$ אמ"ם $W = (\ker T^*)^\perp$ אמ"ם $Im(T) = W$ אמ"ם T על.
המעבר השלישי נובע מכך ש$(\ker T^*)^\perp = ImT$.
2 נובע מ1 ע"י החלפת T בT^*.

- תרגיל: הוכיחו עבור $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$
  1. $N(A) = N(A^*A)$
  2. $rank(AA^*) = rank(A^*A)$

הוכחה: $N(A) \subseteq N(A^*A)$. יהי $v \in N(A)$. כלומר $Av = 0$. אז $A^*Av = 0$.
$N(A) \supseteq N(A^*A)$. יהי $v \in N(A^*A)$. אז $A^*Av = 0$.

$$\langle Av, Av\rangle = \langle v, A^*Av\rangle = \langle v, 0\rangle = 0$$

לכן $Av = 0$. וזה אומר ש$v \in N(A)$.
(הערה: באותה דרך בדיוק היתן להוכיח ש$\ker T^*T = \ker T$.)
2. מ1 נסיק $\dim N(A) = \dim N(A^*A)$, כמו כן לA ולA^*A יש את אותו מספר עמודות.
לכן ממשפט הדרגה

$$rank(A) = rank(A^*A)$$

באותו אופן נקבל ש

$$rank(A^*) = rank(AA^*)$$

שיחלוף והצמדה אינם משפיעים על הדרגה, כלומר $rank(A) = rank(A^*)$, ולכן

$$rank(A^*A) = rank(AA^*)$$

אופרטורים מיוחדים

יהי V ממ"פ.

הגדרה: אופרטור $T : V \to V$ יקרא:

1. נורמלי, אם $TT^* = T^*T$.
2. אוניטרי, אם $TT^* = T^*T = I$.

הערה: אם V הוא ממ"פ מעל הממשיים אז לאופרטור אוניטרי קוראים גם אורתוגנלי.

3. הרמיטי (או צמודה לעצמה, צל"ע) אם $T = T^*$.
4. אנטי הרמיטי (או אנטי צמוד לעצמו) , אם $T = -T^*$.

הערה: ניתן להגדיר את כל השמות האלו גם על מטריצות, באמצעות התכונות המקבילות.
תרגיל: תהי A מטריצה אוניטרית. הוכיחו שכל הע"ע שלה הם מע"מ 1.
הוכחה: יהי λ ע"ע של A. יהי v שונה מ0.

$$|\lambda|^2\langle v,v\rangle = \lambda\bar{\lambda}\langle v,v\rangle = \langle \lambda v,\lambda v\rangle = \langle Av,Av\rangle = \langle v,v\rangle$$

$\langle v,v\rangle \neq 0$ ולכן $|\lambda|^2 = 1$ ולכן $|\lambda| = 1$.
טענה: תהי A אוניטרית. אז $|\det A| = 1$
הוכחה:

$$|\det A| = |\Pi\lambda_i| = \prod|\lambda_i| = \prod 1 = 1$$

- תרגיל: תהי $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ אוניטרית עם דטרמיננטה 1. הוכיחו: 1 ע"ע של A.

הוכחה: הפ"א של A הוא ממעלה אי זוגית ולכן יש שורש ממשי, μ. או 1 או -1.
אם כל הע"ע ממשיים אז כולם ± 1. אם כולם -1 אז $\det A = (-1)^3 = -1 = (-1)$ סתירה.
ולכן לפחות אחד מהם שווה 1.
אם לא כולם ממשיים אז יש אחד ממשי, ויש $\lambda, \bar{\lambda}$.

$$1 = \det A = \mu\lambda\bar{\lambda} = \mu \cdot 1$$

לכן $\mu = 1$.

- טענה: לכל אופרטור T, TT^* צל"ע.
  הוכחה: $(TT^*)^* = (T^*)^*T^* = TT^*$
- שאלה: יהי $S : V \to V$ אופרטור צל"ע. האם קיים איזשהו אופרטור T כך ש$S = TT^*$?

תשובה: התשובה היא לא. לצורך כך נמצא תכונה שמתקיימת עבור אופרטורים מהצורה TT^*.
טענת עזר: כל אופרטור מהצורה TT^* (מכיוון שהוא צל"ע הע"ע שלו ממשיים) הע"ע שלו אי שליליים.
הוכחת עזר: יהיו λ ע"ע ו$v \neq 0$ ו"ע.

$$\lambda\langle v,v\rangle = \langle \lambda v,v\rangle = \langle TT^*v,v\rangle = \langle T^*v,T^*v\rangle$$

$$\lambda = \frac{\langle T^*v,T^*v\rangle}{\langle v,v\rangle}$$

ניזכר כי מתכונת אי השליליות וקטור כפול עצמו תמיד גדול שווה מ0. לכן $\lambda \geq 0$.

נקח $S=-I$. הוא צל"ע, ויש לו ע"ע -1.

תרגיל: יהי $V = W \oplus W^\perp$. נסמן בπ_W את העתקת ההטלה. כלומר, $\pi_W(v)$. (וקטור שנמצא בW וההפרש ב$W^\perp$).

ניתן להתייחס לזה כאופרטור מV לV.

חשבו את הכוכב שלו.

פתרון: נבנה בסיס או"נ לV ע"י זה שניקח בסיס או"נ לW ול$W^\perp$. האיחוד של הבסיסים ייתן בסיס או"נ על V, B.

כל וקטור בW ההטלה שולחת אותו לעצמו. וכל וקטור ב$W^\perp$ ההטלה שלו על W היא 0. ולכן

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T(v_1)]_B & & [T(v_n)]_B \end{pmatrix} = I \oplus 0$$

$[T^*]_B = [T]_B^* = [T]_B$. זה אומר ש$T = T^*$.

דרך נוספת להוכיח ש$T = T^*$. נעשה לפי הגדרת כוכב.

נשים לב שלכל $v \in V$, $T(v) \in W$ ו$v - T(v) \in W^\perp$.

$$\langle T(v), u\rangle = \langle \pi_W(v), u\rangle = \langle \pi_W(v), \pi_W(u) + (u - \pi_W(u)\rangle =$$

$$\langle \pi_W(v), \pi_W(u)\rangle + \langle \pi_W(v), (u - \pi_W(u)\rangle = \langle \pi_W(v), \pi_W(u)\rangle$$

$$\langle v, T(u)\rangle = \langle \pi_W(v) + v - \pi_W(v), \pi_W(u)\rangle =$$

$$\langle \pi_W(v), \pi_W(u)\rangle + \langle v - \pi_W(v), \pi_W(u)\rangle = \langle \pi_W(v), \pi_W(u)\rangle$$

וקיבלנו שוויון.