לינארית 2 - מטלה 4 - שילוש ועתקות לינאריות

מועד הגשה: שבוע אחרי שמתחילים לתרגל העתקות לינאריות.

הנחיות:
בראש הדף הראשון ציינו את הפרטים הבאים:

1. מספר תרגיל
2. שם מלא
3. ת.ז
4. מספר קבוצת תרגול שאליה אתם מגיעים.

תרגיל 1. שלש את המטריצות הבאות, כלומר מצא P הפיכה ו-Q משולשית כך ש-$Q = P^{-1}AP$

.1

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & -1 \\ -5 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

פתרון. בעזרת חישוב נקבל שהפולינום האופייני הוא

$$f_A(\lambda) = (\lambda - 1)^3$$

כעת נחשב את הו"ע של הע"ע $\lambda = 1$

$$v \in N \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ -5 & -2 & -3 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כעת יש להשלים את הווקטור הזה לבסיס ל-$\mathbb{R}^2$ ניקח

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ונבנה את המטריצה

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נחשב את המטריצה

$$\begin{aligned} Q &= P^{-1}AP \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & -1 \\ -5 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

וקבלנו ש-

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{Q} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & -1 \\ -5 & -2 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P}$$

.2

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

פתרון. בעזרת חישוב נקבל שהפולינום האופייני הוא

$$f_A(\lambda) = (\lambda - 2)^3$$

כעת נחשב את הו"ע של הע"ע $\lambda = 2$

$$v \in N \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

לכן

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כעת יש להשלים את הווקטור הזה לבסיס ל-$\mathbb{R}^2$ ניקח

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ונבנה את המטריצה

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נחשב את המטריצה

$$\begin{aligned} Q &= P^{-1}AP \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

נסמן ב-Q_1את המטריצה המתקבלת על ידי מחיקת השורה והעמודה הראשונה

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

כעת נשלש את Q_1: הפולינום האופייני של Q_1הוא

$$f_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2$$

נחשב את הו"ע של הע"ע $\lambda = 2$

$$v \in N \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

נשלים את v לבסיס ל-$\mathbb{R}^2$על ידי $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ונרשום את הווקטורים עמודות של מטריצה

$$P_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

נתבונן במטריצה המתקבלת מ-

$$\begin{aligned} P_1^{-1} Q_1 P_1 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

שהיא מטריצה משולשית לכן סיימנו את התהלידת אבל כדי למצוא את Pו-Qהדרושות נגדיר

$$P_1' = I_1 \oplus P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

והמטריצה

$$P_1'^{-1} P_0^{-1} A P_0 P_1'$$

היא אמורה להיות משולשית עלינה, הבה נבדוק

$$\begin{aligned} P_1'^{-1} P_0^{-1} A P_0 P_1' &= \\ &= (P_0 P_1')^{-1} A (P_0 P_1') \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

תרגיל 2. הוכח או הפרך: האם העתקות הבאות הן העתקות לנאריות?

1. $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת על ידי

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x \\ -3y \end{pmatrix}$$

פתרון.

- משמרת חיבור-

$$\begin{aligned}
T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) &= \\
T\left(\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix}\right) &= \\
\begin{pmatrix} 5\left(x_1+x_2\right) \\ -3\left(y_1+y_2\right) \end{pmatrix} &= \\
\begin{pmatrix} 5x_1 \\ -3y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5x_2 \\ -3y_2 \end{pmatrix} &= \\
T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

- משמרת כפל בסקלר

$$\begin{aligned}
T\left(\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \\
T\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} &= \\
\begin{pmatrix} 5\alpha x \\ -3\alpha y \end{pmatrix} &= \\
\alpha\begin{pmatrix} 5x \\ -3y \end{pmatrix} &= \\
\alpha T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

כלומר העתקה $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x \\ -3y \end{pmatrix}$ מקיימת את שתי התכונות ולכן היא העתקה לינארית

2. $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת על ידי

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

פתרון.

- משמרת חיבור-

$$\begin{aligned}
T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) &= \\
T\left(\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix}\right) &= \\
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \\
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \\
T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

• משמרת כפל בסקלר

$$
\begin{aligned}
T\left(\alpha\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) &= \\
T\begin{pmatrix}\alpha x\\\alpha y\end{pmatrix} &= \\
\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} &= \\
\alpha\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} &= \\
\alpha T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

כלומר העתקה $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ מקיימת את שתי התכונות ולכן היא העתקה לינארית. והיא נקראת העתקת האפס

3. $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת על ידי

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2\\y\end{pmatrix}$$

פתרון.

• משמרת כפל בסקלר

$$T\left(\alpha\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}\alpha x\\\alpha y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\alpha x)^2\\\alpha y\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}\alpha x\\y\end{pmatrix}\neq\alpha T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

כלומר העתקה $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2\\y\end{pmatrix}$ אינה משמרת כפל בסקלר ולכן אינה העתקה לינארית

4. $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת על ידי

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\2x\\z\end{pmatrix}$$

פתרון.

• משמרת חיבור-

$$
\begin{aligned}
T\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}\right) &= \\
T\left(\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\\z_1+z_2\end{pmatrix}\right) &= \\
\begin{pmatrix}(x_1+x_2)+(y_1+y_2)\\2(x_1+x_2)\\z_1+z_2\end{pmatrix} &= \\
\begin{pmatrix}x_1+y_1\\2x_1\\z_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2+y_2\\2x_2\\z_2\end{pmatrix} &= \\
T\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- משמרת כפל בסקלר

$$
\begin{aligned}
T\left(\alpha\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) &= \\
T\begin{pmatrix}\alpha x\\\alpha y\\\alpha z\end{pmatrix} &= \\
\begin{pmatrix}\alpha x+\alpha y\\2\alpha x\\\alpha z\end{pmatrix} &= \\
\alpha\begin{pmatrix}x+y\\2x\\z\end{pmatrix} &= \\
\alpha T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

כלומר העתקה $\begin{pmatrix}x+y\\2x\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}T$ מקיימת את שתי התכונות ולכן היא העתקה לינארית

5. $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת על ידי

$$
T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\x+2y\\0\end{pmatrix}
$$

פתרון.

- משמרת חיבור-

$$
\begin{aligned}
T\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_1\end{pmatrix}\right) &= \\
T\left(\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\\z_1+z_2\end{pmatrix}\right) &= \\
\begin{pmatrix}1\\(x_1+x_2)+2\left(y_1+y_2\right)\\0\end{pmatrix} &=
\end{aligned}
$$

בעוד ש-

$$
\begin{aligned}
T\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix} &= \\
\begin{pmatrix}1\\(x_1+x_2)+2\left(y_1+y_2\right)\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\(x_1+x_2)+2\left(y_1+y_2\right)\\0\end{pmatrix} &= \\
\begin{pmatrix}2\\(x_1+x_2)+2\left(y_1+y_2\right)\\0\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ההעתקה $\begin{pmatrix}1\\x+2y\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}T$ אינה משמרת חיבור ולכן אינה העתקה לינארית

6. תהי $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה כלשהי. תהי $T : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ נגדיר

$$T(A) = AB - BA$$

פתרון.

- משמרת חיבור-

$$\begin{aligned} &T(A_1 + A_2) &=\\ &(A_1 + A_2)B - B(A_1 + A_2) &=\\ &A_1B + A_2B - BA_1 - BA_2 &=\\ &A_1B - BA_1 + A_2B - BA_2 &=\\ &T(A_1) + T(A_2) \end{aligned}$$

משמרת כפל בסקלר

$$\begin{aligned} &T(\alpha A) &=\\ &(\alpha A)B - B(\alpha A) &=\\ &\alpha(AB - BA) &=\\ &\alpha T(A) \end{aligned}$$

תרגיל 3. האם קיימת העתקה לינארית $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_5[x]$ המקיימת

$$\begin{cases} T\begin{pmatrix} -1\\ 4\\ 2\\ 1 \end{pmatrix} = x+1\\ T\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix} = x\\ T\begin{pmatrix} -2\\ 5\\ 3\\ 2 \end{pmatrix} = 2 \end{cases}$$

פתרון.

- לא, נניח שכן אז לכל $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$ צריך להתקיים

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$$

כלומר צריך לתקיים

$$2x+1 = x+1+x = T\left(\begin{pmatrix} -1\\ 4\\ 2\\ 1 \end{pmatrix}\right) + T\left(\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} -1\\ 4\\ 2\\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} -2\\ 5\\ 3\\ 2 \end{pmatrix}\right) = 2$$

סתירה.

תרגיל 4. תהיה $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ העתקה לינארית. הסבירו במילים מהי הפעולה הגאומטרית שהעתקה הלנארית עושה על הווקטורים. רמז: נסו להבין מה קורה לווקטורים $\begin{pmatrix} 0\\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\ 0 \end{pmatrix}$ ווקטורים נוספים

1. $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix}$ עבור $a > 0$

פתרון.

העתקה T לוקחת ווקטור ומאריכה/מכווצת אותו בפקטור a.

2. $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$

פתרון.

העתקה T משקפת ווקטורים ביחס לציר X

3. $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$

פתרון.

העתקה T משקפת ווקטורים ביחס לציר Y

4. $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{pmatrix}$

פתרון.

העתקה T מסובבת את הווקטורים בזווית של $45°$ נגד כיוון השעון

5. $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)x - \sin(\theta)y \\ \sin(\theta)x + \cos(\theta)y \end{pmatrix}$

פתרון.

העתקה T מסובבת את הווקטורים בזווית של θ נגד כיוון השעון

תרגיל 5. מצאו מטריצה A שמקיימת $T(v) = Av$ לכל v עבור העתקות הליניאריות הבאות:

1. $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x+5z \end{pmatrix}$

פתרון.

ההעתקה היא מ-$\mathbb{R}^3$ל-$\mathbb{R}^2$ לכן סדר המטריצה יהיה 2×3 כלומר נחפש מטריצה $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}$ כך שלכל ווקטור $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ יתקיים

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x+5z \end{pmatrix}$$

לכן

$$\begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}y \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x+5z \end{pmatrix}$$

מכאן נקבל ש-

$$\begin{cases} a_{11} &= 1 \\ a_{12} &= 1 \\ a_{13} &= 1 \\ a_{21} &= 2 \\ a_{22} &= 0 \\ a_{23} &= 5 \end{cases}$$

כלומר

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&5\end{pmatrix}$$

שימו לב שגם כאן a_{ij} התקבל להיות המקדם של המשתנה ה-j ברכיב ה-i של תוצאה.

.2 $$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y+z\\2z\\x+2y+z\end{pmatrix}$$

פתרון.

ההעתקה היא מ-$\mathbb{R}^3$-ל$\mathbb{R}^4$ לכן סדר המטריצה יהיה 3×4 כלומר נחפש מטריצה $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{31}&a_{33}\\a_{41}&a_{41}&a_{43}\end{pmatrix}$ כך שלכל

וקטור $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ יתקיים

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y+z\\2z\\x+2y+z\end{pmatrix}$$

לכן

$$\begin{pmatrix}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}y\\a_{21}x+a_{22}y+a_{23}y\\a_{31}x+a_{32}y+a_{33}y\\a_{41}x+a_{42}y+a_{43}y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y+z\\2z\\x+2y+z\end{pmatrix}$$

מכאן נקבל ש-

$$\begin{cases}a_{11}&=&1&a_{21}&=&0&a_{31}&=&0&a_{41}&=&1\\a_{12}&=&0&a_{22}&=&1&a_{32}&=&1&a_{42}&=&2\\a_{13}&=&0&a_{23}&=&1&a_{33}&=&2&a_{43}&=&1\end{cases}$$

כלומר

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&2\\1&2&1\end{pmatrix}$$

שימו לב שגם כאן a_{ij} התקבל להיות המקדם של המשתנה ה-j ברכיב ה-i של תוצאה.

תרגיל 6. האם מצאת כלל מסויים על A מהתרגיל הקודם?

פתרון.

כן, הרכיב ה-a_{ij} התקבל הוא המקדם של המשתנה ה-j ברכיב ה-i של תוצאה.

בהצלחה!!