(1) 13.10.13
אנליזה פונקציונלית
הרצאה 1

gidi.amir@gmail.com
amirgi@macs.biu.ac.il

גידי עמיר, בניין 216
חדר 107

ספר עיקרי: introduction to Hilbert spaces with applications
L. Debnath and P. Mikusinski
+ דפים שיופיעו באתר

מבחן בית 80% תרגילים 20%
(בערך 4-3 להגשה...)

שדה $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ (שדה)
בד"כ נדבר על שדה הממשיים והמרוכבים

<u>הגדרה:</u> מרחב וקטורי: קבוצה E עם שתי פעולות: $x,y \in E$

$(x,y) \to x+y \qquad x,y \in E$

$(x,\lambda) \to \lambda x \qquad x \in E$

כך שמתקיימות התכונות הבאות:

1. $\forall x,y \in E \quad x+y = y+x$ — קומוטטיביות
2. $x \quad (x+y)+z = x+(y+z)$ — אסוציאטיביות
3. $\forall x,y \in E \ \exists w: \ x+w = y$
4. $\alpha,\beta \in \mathbb{F}, \ x \in E \quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
5. $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$ — דיסטריבוטיביות
6. $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$
7. $\underset{\text{סקלר}}{1} \cdot x = x$

<u>טענה:</u> קיים יחיד וקטור ניטרלי לפעולת החיבור, נסמן אותו ב-$\underline{0}$ כך ש:
$\forall x \in E \quad x+0 = x$

<u>הוכחה:</u> בהינתן $x \in E$, מתכונה 3 קיים $z_x \in E$ כך ש $x+z_x = x$
יהי $y \in E$ אז גם קיים w כך ש- $x+w=y$

$$\left.\begin{matrix} x+z_x+w = x+w = y \\ \Downarrow \\ x+w+z_x = y+z_x \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = y+z_x \quad \forall y \in E$$

$\Downarrow$ לכן z_x איבר ניטרלי לחיבור [הוכחת קיום]

2 13.10.13
[illegible]
הרצאה 1

נוכיח יחידות: נניח ש z_1, z_2 איברים נייטרליים לחיבור:

$z_1 + z_2 = z_1$

z_1 נייטרלי לחיבור — כי $x+z_2=x$ לכל x

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 = z_2$ כי $\forall x \ x+z_1=x$

$z_1 = z_2$

עוד תכונות:

אם $x \neq 0$! $\lambda x = 0$ אז $\lambda = 0$

אם $\lambda \neq 0$! $\lambda x = 0$ אז $x = 0$

$(-1)x = -x$
$0 \cdot x = 0$

דוגמאות: • $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$

$\mathbb{R}^n \to \{x_1 \dots x_n : x_i \in \mathbb{R}\}$

• מרחבי פונקציות: קבוצה X מרחב וקטורי E (למשל $E=\mathbb{R}$)

$F = \{$ כל הפונקציות מ X ל E $\}$ עם חיבור וכפל נקודתי

$f: X \to E$
$g: X \to E$

הגדרה לכפל וחיבור נקודתי:
$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
$(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$

$:=$ הגדרה

למשל אם $X = \{1 \dots n\}$, $E = \mathbb{R}$ נקבל את $\mathbb{R}^n$ $(x_1 \dots x_n)$ $x_i \in \mathbb{R}$
וקטור ב $\mathbb{R}^n$ הוא פונקציה מ $\{1 \dots n\}$ ל $\mathbb{R}$, $f(i) = x_i$.

תת מרחב- תת קבוצה $E_1 \subset E$ נקראת תת מרחב (וקטורי) אם לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$
ולכל $x, y \in E$ מתקיים $\alpha x + \beta y = E_1$

[E_1 סגורה תחת פעולות החיבור והכפל בסקלר]

E הוא תת מרחב של עצמו.

אם $E_1 \subsetneq E$ (לא שווה) תת מרחב אז הוא נקרא תת מרחב ממש (proper subspace)

דוגמאות למרחבים קשורים של פונקציות (מרחבי פונקציות)

יהי $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ תחום פתוח (למשל כדור פתוח)

המרחבים הבאים הם תתי מרחבים של מרחב הפונקציות מ Ω ל $\mathbb{C}$:

• כל הפונקציות הרציפות על Ω - $C(\Omega)$ — גזירה - קיימת נגזרת בכל נק'

• פונ' גזירות ברציפות k פעמים - $C^k(\Omega)$

(3) 13.10.13
אנליזה פונ'
הרצאה 1

• פונ' גזירות אינסוף פעמים - $C^\infty(\Omega)$

• פולינומים מעל Ω - $P(\Omega)$

מתקיים: $P(\Omega)\subset C^\infty(\Omega)\subset C^k(\Omega)\subset C(\Omega)\subset \underbrace{F(\Omega)}_{\text{כל הפונ'}}$

[כל פונ' שגזירה אינסוף פעמים בפרט גזירה גם k פעמים ולכן C^∞ מוכל ב C^k

<u>דוג:</u> מרחבי סדרות - פונ' מ $\underset{\text{טבעיים}}{\mathbb{N}}$ ל E (מרחב כל הסדרות מעל E)

$x_i\in E \quad (x_1,x_2,x_3\dots)$

חיבור וכפל בסקלר - קורדינטה קורדינטה

$$(x_1,x_2,x_3\dots)+(y_1,y_2,y_3\dots)=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\dots)$$

$$\lambda(x_1,x_2\dots)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\dots)$$

<u>דוג:</u> $p\ge 1$

$$\ell^p=\Big\{\underset{x_i\in\mathbb{R}\text{ או }\mathbb{C}}{(x_1,x_2,\dots)}:\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<\infty\Big\}$$

~~צריך להראות שזה מרחב וקטורי לפי ההגדרות~~

טענה - ℓ^p הוא תת מרחב של כל הסדרות מעל $\mathbb{C}$ (או $\mathbb{R}$)
(כלומר - זה שקול להוכיח ש ℓ^p מרחב וקטורי).

צריך להראות שאם $x\in\ell^p$; $\lambda\in\mathbb{R}$ אז $\lambda x\in\ell^p$

! $x,y\in\ell^p$ אז $x+y\in\ell^p$

[זה שקול להראות ש $\alpha x+\beta y\in\ell^p$ לכל α,β

<u>הוכחה:</u> $\lambda x=(\lambda x_1,\lambda x_2\dots)$

$x,y\in\ell^p$, $\sum|x_i|^p<\infty$, $\sum|y_i|^p<\infty$

צ"ל: $\lambda x\in\ell^p \to \sum|\lambda x_i|^p<\infty$

$x+y\in\ell^p \quad \sum|x_i+y_i|^p<\infty$

$$\sum|\lambda x_i|^p=\lambda^p\cdot\sum|x_i|^p<\infty$$

$$\sum|(x+y)_i|^p=\sum|x_i+y_i|^p$$ צריך להוכיח שהביטוי סופי

$$|x_i+y_i|^p\le(2\max(|x_i|,|y_i|))^p\le 2^p(\max(|x_i|^p,|y_i|^p))$$

נסתכל קורדינטה קורדינטה

נחסום עם פעמיים המקס' מבין המספרים המוחלטים (נשכ')

$$\le 2^p(|x_i|^p+|y_i|^p)$$

נקח Σ של חיבור חסום ע"י הסכום

$$\sum|(x+y)_i|^p=\sum|x_i+y_i|^p\le 2^p\sum(|x_i|^p+|y_i|^p)<\infty \Leftarrow$$

מקבלים

$$=2^p\cdot\underbrace{\sum|x_i|^p}_{<\infty}+2^p\underbrace{\sum|y_i|^p}_{<\infty}<\infty$$

(ש) 13.10.13

שלמה פויר

הרצאה 1

למשל, $x_n = \frac{1}{n}$

$\frac{1}{n}$ לא ב-ℓ^1 אבל כן ב-ℓ^2 כי $\sum \frac{1}{n} = \infty$ אבל $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$.

<u>מכפלה קרטזית</u>: E_1, E_2 מרחבים וקטוריים.

המכפלה הקרטזית $E_1 \times E_2$:

$$E_1 \times E_2 = \{ (x_1, x_2) : x_1 \in E, x_2 \in E \}$$

(אוסף כל הזוגות שהאיבר הראשון שייך ל-E, והשני שייך ל-E)

חיבור וכפל בסקלר (נקודתי בקורדינטות):

$$\underbrace{(\overset{\Uparrow}{E_1}\ x_1, \overset{\Uparrow}{E_2}\ x_2)}_{E_1 \times E_2} + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

אם יש n מרחבים ניתן להגדיר:

באותה צורה, $E_1 \dots E_n$, את $E_1 \times E_2 \cdots \times E_n$

$\{ (x_1, x_2 \dots x_n) \quad x_i \in E_i \}$ (ועם פעולות חיבור וכפל נקודתי)

אוסף מרחבים וקטוריים: $\{E_j\}_{j \in J}$

$$\prod_{j \in J} E_j = \{ (x_j)_{j \in J} : x_j \in E_j \}$$

אם המרחבים E_i זהים אז $E_1 \times \dots \times E_n = E^n$, למשל $\mathbb{R}^n$

[למשל, $J = \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $E_j = \mathbb{R}$ אז $\prod_{j \in J} E_j = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \}$]

<u>קומבינציה לינארית</u>

$x_1 \dots x_n \in E$, $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{F}$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

וקטורים $x_1 \dots x_n$ נקראים בלתי תלויים לינארית (בת"ל) אם $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$

$\Leftarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

אחרת הם נקראים תלויים לינארית.

דוגמאות: ב-$\mathbb{R}^3$: $(1,0,0)$ $(0,2,1)$ $(0,0,3)$ בת"ל

$(1,0,0)$ $(0,1,0)$ $(3,1,0)$ תלויים $\Leftarrow$ $x_3 = 3x_1 + x_2$

$3x_1 + x_2 - x_3 = 0$

$\Downarrow$

אפשרות ש $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \neq 0$

תלות לינארית תלויה בשדה שאנו עובדים -

$\mathbb{C}$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$: $1, i$ בת"ל

$\mathbb{C}$ כמרחב מעל $\mathbb{C}$ - כן תלויים

$\alpha_1 + \alpha_2 \cdot i = 0$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \Rightarrow$ בת"ל מעל $\mathbb{R}$

$1 \cdot 1 + i \cdot i = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 1, \alpha_2 = i \Rightarrow$ ת"ל מעל $\mathbb{C}$

הסבר

(5) 13.10.13

אלגברה (הרצאה)

הגדרה! בהינתן קבוצת וקטורים סופית או אינסופית $A \subset E$

$$\operatorname{span}(A) = \left\{ \begin{array}{c} \text{כל הקומבינציות הלינאריות} \\ \text{(הסופיות) של איברים מהקבוצה } A \end{array} \right\}$$

$$= \{ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n : n \in \mathbb{N},\ x_i \in A,\ \alpha_i \in \mathbb{F} \}$$

קבוצה A נקראת פורשת (spanning) אם $\operatorname{span} A = E$.

הגדרה! בסיס - קבוצה פורשת, בלתי תלויה לינארית
(כלומר קבוצת וקטורים שהיא בת"ל ופורשת את המרחב)

דוגמאות: הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$ $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ בסיס ל $\mathbb{R}^3$

$\{(3,2,1),(1,0,0),(e,1,-1)\}$ גם בסיס ל $\mathbb{R}^3$

$\{(1,0,0),(2,3,0),(3,1,2),(1,4,5)\}$ פורשת את $\mathbb{R}^3$, אך לא בסיס (הוקטורים ת"ל)

מס' סופי של וקטורים שפורשים את המרחב

מרחב וקטורי נקרא סוף מימדי אם קיים בסיס סופי למרחב.

במקרה כזה (תרגיל) כל הבסיסים יהיו באותו גודל (מס' וקטורים), ומס' זה נקרא המימד של המרחב.

$\mathbb{R}^3$ מרחב 3 מימדי. $\mathbb{C}$ - ממש חד מימדי כמרחב מעל $\mathbb{C}$

דו מימדי כמרחב מעל $\mathbb{R}$ (כלומר, ניתן להתייחס כמספרים מ $\mathbb{C}$)

(כלומר חיבור של איברים ב $\mathbb{C}$, כפל במס' ממשי.

קומבינציה לינארית - $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$

$x_i \in \mathbb{C}$

$\lambda_i \in \mathbb{R}$

אם $x_1 = 1$, $x_2 = i$:

$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot i = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

?[$1, i$ בת"ל אם הם מרחב מעל $\mathbb{R}$]

13.10.13
אנליזה פונ'
הרצאה 1

<u>נורמות</u> מרחב ווקטורי

נורמה - פונקציה $x \Rightarrow \|x\|$ ממרחב E ל- $\mathbb{R}$ שמקיימת 3 תכונות:

1. $\|x\| \geq 0$ ו- $\|x\| \neq 0 \Leftarrow x \neq 0$ חיוביות
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ הומוגניות $\|0\| = 0$
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\forall x,y \in E$ אי שוויון המשולש

שקול ל: $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\|$

<u>דוגמאות:</u>

- $|x|$ על $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$.
- $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ $\|\underline{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots |x_n|$ ℓ_n^1 $\mathbb{R}^n$
- $\|\underline{x}\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots |x_n|^2}$ ℓ_n^2 $\mathbb{R}^n$

$$\|\underline{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

- $\|\underline{x}\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$ ℓ_n^∞

<u>טענה:</u> $\|(x_1 \dots x_n)\|_\infty$ נורמה
צריך להוכיח שהיא מקיימת את 3 התכונות:

(1) $\max_{1\leq i\leq n} |x_i| \geq 0$ ברור.

אם $\max_{1\leq i\leq n} |x_i| = 0$ אז $x_i = 0$ לכל i ולכן $\underline{x} = 0$

(2) $\max_{1\leq i\leq n} |\lambda x_i| = |\lambda| \max |x_i|$ ~~נשאר להוכיח את (3)~~

נשאר להוכיח את (3):

(3) $$\|x+y\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i + y_i| \leq \max_{1\leq i\leq n} (|x_i| + |y_i|) \leq \max_{1\leq i\leq n} |x_i| + \max_{1\leq i\leq n} |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

דוג: $\|(1,1,0)\|_\infty < \|(1,0,0)\|_\infty + \|(0,1,0)\|_\infty$

- דוג: $C([0,1])$, $C(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ תחום סגור חסום.

$$\|f\|_{C(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} |f(x)| \quad (\text{זה בעצם } \max)$$

צ"ל נורמה (תכונות 1 ו 2 קל להוכיח. נוכיח את תכונה 3 -)

$$\|f+g\| = \max_x \|f(x) + g(x)\| \leq \max_x |f(x)| + |g(x)|$$
$$\leq \max_x |f(x)| + \max_y |g(y)| = \|f\| + \|g(y)\|$$

sup - החסם הכי קטן
אחרת החסם קטן ממנו.
sup -

לכל קבוצה חסומה מלמעלה
יש sup

מרחב וקטורי + נורמה נקרא מרחב נורמי

מרחבי ℓ^p עם הנורמה $\|(x_1,x_2,\dots)\| = (\sum|x_i|^p)^{1/p}$ הם מרחבים נורמיים

$$\|(x_1,x_2,\dots\|_p = \left(\sum_{n=1}^{p}|x_n|^p\right)^{1/p}$$

רוצים להראות ש $\|\cdot\|_p$ היא נורמה:

- הוכחת חיוביות והומוגניות - קל.
- נשאר להראות את אש"מ:

$$\|x+y\|_p \le \|x\|_p+\|y\|_p$$

$$\left(\sum|x_i+y_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum|x_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum|y_i|^p\right)^{1/p}$$

זה נקרא גם אי שוויון מינקובסקי.

כדי להוכיח את אי שוויון מינקובסקי נשתמש באי"ש הולדר:

אי"ש הולדר (Hölder): אם $p,q\ge 1$ מקיימים: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ (צמודים)

שקול

$p+q=pq$
$p=q(p-1)$
$q=p(q-1)$

אז: $\sum|x_ny_n| \le \left(\sum|x_n|^p\right)^{1/p}\left(\sum|y_n|^q\right)^{1/q}$

(עבור $p=q=2$ זה נקרא קושי שוורץ)

הוכחה ש אי"ש מינקובסקי בהינתן אי"ש הולדר:

$$\sum|x_n+y_n|^p = \sum|x_n+y_n|\cdot|x_n+y_n|^{p-1}$$

אש"מ עבור $|x_n+y_n|$ $\le \sum|x_n|\cdot|x_n+y_n|^{p-1}+\sum|y_n|\cdot|x_n+y_n|^{p-1}$

לפי אי"ש הולדר: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ $\le \left(\sum|x_n|^p\right)^{1/p}\cdot\left(\sum\left(|x_n+y_n|^{p-1}\right)^q\right)^{1/q}+\left(\sum|y_n|^p\right)^{1/p}\cdot\left(\sum\left(|x_n+y_n|^{p-1}\right)^q\right)^{1/q}$

(נסדר קצת..) $= \left(\sum|x_n|^p\right)^{1/p}\cdot\left(\sum|x_n+y_n|^{\underbrace{q(p-1)}_{p}}\right)^{1/q}+\left(\sum|y_n|^p\right)^{1/p}\cdot\left(\sum|x_n+y_n|^{\underbrace{q(p-1)}_{p}}\right)^{1/q}$

$$= \left(\sum|x_n|^p\right)^{1/p}\cdot\left(\sum|x_n+y_n|^p\right)^{1/q}+\left(\sum|y_n|^p\right)^{1/p}\cdot\left(\sum|x_n+y_n|^p\right)^{1/q}$$

$$= \left(\left(\sum|x_n|^p\right)^{1/p}+\left(\sum|y_n|^p\right)^{1/p}\right)\left(\sum|x_n+y_n|^p\right)^{1/q}$$

$$\le \left(\underbrace{\left(\sum|x_n|^p\right)^{1/p}+\left(\sum|y_n|^p\right)^{1/p}}_{\text{זה החסם שחיפשנו}}\right)\left(\sum|x_n+y_n|^p\right)^{1/q}$$

מחלקים ב $\left(\sum|x_n+y_n|^p\right)^{1/q}$ $\Rightarrow \left(\sum|x_n+y_n|^p\right)^{\frac{1-\frac{1}{q}}{\frac{1}{p}}} \le \left(\sum|x_n|^p\right)^{1/p}+\left(\sum|y_n|^p\right)^{1/p}$

$$\Rightarrow \left(\sum|x_n+y_n|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum|x_n|^p\right)^{1/p}+\left(\sum|y_n|^p\right)^{1/p}$$