סיכום מבנים אלגבריים – הגדרות ומשפטים

24 בינואר 2013

כל ההגדרות שמופיעות במערכי התרגול שהעלנו לאתר רלוונטיות.

1 משפטי האיזומורפיזם

1.1 משפט האיזומורפיזם הראשון

משפט 1.1 תהיינה G ו H חבורות, $\phi : G \mapsto H$ הומומורפיזם. אזי $\ker\phi \trianglelefteq G$ ומתקיים $Im\phi \cong G/ker\phi$.

שימושים: כאשר אתם מתבקשים להראות איזומורפיזם בין חבורת מנה לחבורה אחרת – הדרך הסטנדרטית לעשות זאת היא למצוא הומומורפיזם על מהחבורה הראשונה, לחשב את הגרעין שלה ולהפעיל את משפט האיזומורפיזם הראשון. כאשר רוצים להראות כי תת־חבורה של G היא נורמלית, אז ניתן להראות כי היא גרעין של הומומורפיזם כלשהו מ־G לחבורה H כלשהי.

1.2 משפט האיזומורפיזם השני

משפט 1.2 תהי G חבורה, $N \trianglelefteq G$, $H \leq G$. אזי מתקיים:

1. HN היא תת־חבורה של G.
2. $HN/N \cong H/H\cap N$.

שימושים: כאשר הינכם מתבקשים להראות ש G היא מכפלה ישרה של $A, B \trianglelefteq G$ מראים שחיתוך הוא טריוויאלי.

דוגמה: הוכח ש $D_{2n} \cong D_n \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ עבור n אי־זוגי.

פתרון: $Z\left(D_{2n}\right)$ מרכז של D_{2n} הינו $\{e, r^n\}$, כמו כן החבורה שנוצרת על ידי s ,r^2, D הינה איזומורפית ל D_n. קל לבדוק שהחיתוך שלהם הוא $\{e\}$. משיקולי העוצמה קיבלנו $|D_{2n}| = |D| \left|Z\left(D_{2n}\right)\right| = \left|DZ\left(D_{2n}\right)\right|$. לכן $DZ\left(D_{2n}\right) = D_{2n}$.

1.3 משפט האיזומורפיזם השלישי

משפט 1.3 תהי G חבורה, $N, M \trianglelefteq G$, $N \trianglelefteq M$. אזי $G/M \cong {}^{G/N}/_{M/N}$.

2 משפט קיילי

2.1 משפט קיילי

משפט 2.1 לכל חבורה G קיימת קבוצה X כך שקיים שיכון $G \hookrightarrow S_X$.

2.2 משפט העידון

משפט 2.2 תהי G חבורה, $H \leq G$ תת־חבורה. נסמן ב־X את קבוצת הקוסטים השמאליים של H. אזי קיים הומומורפיזם טבעי מ־G ל־S_X שמתאים לכל $g \in G$ את פונקציית הכפל בשמאל ב־g. הומומורפיזם הנ"ל הוא שיכון אם ורק אם תת־חבורה נורמלית היחידה שמוכלת ב־H היא $\{e\}$.

שימושים: אחד השימושים הנפוצים ־ להראות קיום או אי קיום חבורות פשוטות.

דוגמה: תהי G חבורה מסדר אינסופי, ולה תת־חבורה H מאינדקס סופי. הוכח כי קיימת לה תת־חבורה נורמלית מאינדקס סופי.

פתרון: נפעיל את העתקה ϕ ממשפט העידון קיילי. מכיוון שאינדקס של של H סופי, S_X (כאשר X היא קבוצת הקוסטים השמאליים של H) סופית, לכן העתקה הנ"ל אינה שיכון. לכן קיים לה גרעין לא טריוויאלי. לפי המשפט הראשון של נותר, $Im\phi \cong G/ker\phi$, לכן האינדקס של $ker\phi$ סופי.

3 יחס צמידות

3.1 הגדרה ותכונות

הגדרה 3.1 לכל $g \in G$ מגדירים הצמדה על ידי g, $\phi_g : G \mapsto G$ עלי ידי $\phi_g(x) = gxg^{-1}$.

תכובות:

1. הצמדה היא אוטומורפיזם של G.
2. $g \in \ker G \Leftrightarrow \phi_g = id$.

הגדרה 3.2 איברים $g, h \in G$ נקראים צמודים עם ורק אם קיים a כך ש $aga^{-1} = h$. לכל איבר $g \in G$, מגדירים מחלקת צמידות של g, $conj(g) := \left\{h : \exists a : h = aga^{-1}\right\}$ (יש סימונים נוספים למחלקת צמידות). יחס צמידות הוא יחס שקילות.

הגדרה 3.3 עבור $g \in G$ מגדירים מרכז של g ב G, $\mathcal{C}_G(g) := \left\{h : hgh^{-1} = g\right\}$, כלומר קבוצת כל האיברים שמתחלפים אם G.

תכונות:

1. לכל $g \in G$, $\mathcal{C}_G(g)$ היא תת־חבורה של G.
2. $[G : \mathcal{C}_g(G)] = |conj(g)|$.
3. $\mathcal{C}_G(g) = G \Leftrightarrow g \in Z(G)$. $Z(G) := \{z \in G : \forall g \in G,\ zg = gz\}$, כלומר המרכז של כל G.

משפט 3.4 תהי G חבורה סופית. נסמן ב X קבוצת נציגים כלשהי של מחלקות הצמידות של G. אזי מתקיים $|G| = |Z(G)| + \sum_{g \in X \setminus Z(G)} |conj(g)| = |Z(G)| + \sum_{g \in X \setminus Z(G)} [G : \mathcal{C}_G(g)]$.

שימושים: כאשר יש טענה על חבורות מסדר ראשוני ־ בהוכחת משפט קושי וקיום מרכז לא טריוויאלי למשל. כאשר אתם מתבקשים להוכיח טענה על חבורות מסדר ראשוני ־ ולא יודעים מה לעשות ־ המשפט יכול להיות מועיל. משטפ שימושי נוסף, שהרבה פעמים עוזר ־ הוא משפט קושי.

משפט 3.5 תהי G חבורה מסדר סופי, p ראשוני ונניח ש $p \mid |G|$. אזי קיימת ל G תת־חבורה מסדר p.

הערה 3.6 כדאי להבין איך מוכיחים את המשפט. לא מפני שיש לחשוב לזכור אותה ־ אלה זו היא דוגמה מצויינת ליישומם של נוסחת המחלקה.

לגבי הדוגמאות: יש כמה דוגמאות טובות מאד בתרגיל בית 8 ־ הפתרונות כבר באתר.

3.2 הקשר בין צמידות לנורמליות

טענה 3.7 $H \leq G$ היא נורמלית אם ורק אם לכל $g \in G$, $gHg^{-1} \subset H$, כלומר סגורה ביחס לצמידות.

הערה 3.8 זה בעצם אומר, שמספיק להוכיח הכלה ולא שוויון של קבוצות.

טענה 3.9 תהי G חבורה, $H \leq G$. אזי H היא תת־חבורה נורמלית אם ורק אם היא ניתן לבטא את H כאיחוד של מחלקות צמידות של G.

4 מכפלה ישרה פנימית

הגדרה 4.1 תהי G חבורה, אם קיימות $N, K \trianglelefteq G$ כך ש $NK = G$ ו $N \cap K = G$ אזי אומרים G היא מכפלה פנימית ישרה של H ו־K, ומתקיים $G \cong N \times K$.

5 מיון של חבורות אבליות סופיות

5.1 הגדרות ומשפטים

משפט 5.1 כל חבורה אבלית A סופית איזומורפית למכפלה של חבורות ציקליות $\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/d_k\mathbb{Z}$, כאשר $d_{i+1} \mid d_i$. הגורמים d_i נקראים וריאנטים. חבורות אבליות מאותו סדר איזומורפיות אם ורק אם יש להן אותם דיוויזורים אינווריאנטיים.

כל חבורה אבלית A מסדר p^α, כאשר p ראשוני איזומורפית ל $A \cong \mathbb{Z}/p^{\beta_1}\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/p^{\beta_t}\mathbb{Z}$, כאשר $\beta_1 + \beta_2 + \ldots \beta_t = \alpha$, $\beta_i \geq \beta_{i+1}$. β_i נקראים גורמי הרכב חבורות אבליות A ו B מסדר p^α איזומורפיות אם ורק אם יש להן אותם גורמי הרכב.

הערה 5.2 הסדר של הגורמים היסודיים אינו חשוב, מכיוון שאם נרשום את המכפלה הפנימית בסדר אחר, עדיין נקבל את אותם הגורמים. אמנם, אם מסדרים את הגורמים בסדר יורד, הגורמים יהיו שווים אם ורק אם החבורות איזומורפיות.

משפט 5.3 תהי G חבורה אבלית סופית מסדר $n > 1$, ויהי $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n}$ הפירוק שלו לגורמים ראשוניים. אזי

1. $G \cong A_1 \times \ldots A_k$, כאשר $|A_i| = p_i^{\alpha_i}$.
2. לכל $A_j \in \{A_1, \ldots, A_k\}$, $A \cong \mathbb{Z}/p^{\beta_1}\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/p^{\beta_t}\mathbb{Z}$, כאשר $\beta_i \geq \beta_{i+1}$, $\beta_1 + \ldots \beta_t = \alpha_j$ ו t תלוי ב j.
3. הפירוק ב־(1) וב־(2) הוא יחיד, כלומר אם $G \cong B_1 \times \ldots \times B_m$ כאשר $|B_i| = p_i^{\alpha_i}$ אזי $B_i \cong A_i$.

משפט 5.4 יהי $1 < n$, $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n}$. אזי $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p^{\alpha_i}\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/p^{\alpha_n}\mathbb{Z}$.

הערה 5.5 על מנת למיין את כל החבורות האבליות הסופיות מסדר $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_m^{\alpha_m}$ נתון, מספיק למיין את חבורות מסדר $p_i^{\alpha_i}$ לכל i, ואז להכפיל את האפשרויות.

5.2 מעבר בין הצגה לפי גורמי הרכב לאינווריטנים ולהיפך

5.2.1 מציאת גורמי הרכב של מכפלה של חבורות ציקליות

תהי $G \cong \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \ldots \mathbb{Z}/n_s\mathbb{Z}$ חבורה אבלית. יהי $n = n_1 \ldots n_s$, $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ פירוק שלו לראשוניים. נפרק כל n_i, כל לגורמים ראשוניים, $n_i = p_1^{\beta_{i1}} \times \ldots \times p_k^{\beta_{ik}}$. לפי המשפט האחרון $\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p_1^{\beta_{i1}}\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/p_k^{\beta_{ik}}\mathbb{Z}$. אם $\beta_{ij} = 0$, אזי $\mathbb{Z}/p_j^{\beta_{ij}}\mathbb{Z} \cong \{0\}$ וניתן למחוק את הגורם מהמכפלה. אזי גורמי הרכב של G הינם

$$p_j^{\beta_{ij}} : \exists 1 < j < s : \beta_{ij} \neq 0.$$

5.2.2 מציאת אינווריאנטים מגורמי הרכב

נניח ש $G \cong \mathbb{Z}/p_1^{\beta_{11}}\mathbb{Z} \times \ldots \mathbb{Z}/p_1^{\beta_{1k_1}}\mathbb{Z} \times \ldots \mathbb{Z}/p^{\beta_{n1}} \times \ldots \times \mathbb{Z}/p^{\beta_{nk_n}}\mathbb{Z}$.

לפי המשפט הקודם $\mathbb{Z}/p_1^{\beta_{1i}}\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/p^{\beta_{ni}} = \mathbb{Z}/p^{\beta_{1i}} \ldots p^{\beta_{ni}}\mathbb{Z}$. (במקרה ש $i > n_{jk}$, נרשום $n_{jk} = 0$). נעבור על כולם, עד שבסופו של דבר מקבלים צורה אינווריאנטית. (בעצם, עושים את התהליך ההפוך לסעיף הקודם).

(כמו בדוגמאות שעשינו בכיתה)

6 שדות

משפט 6.1 מאפיין של שדה סופי הוא תמיד מספר ראשוני.

משפט 6.2 סדר של שדה סופי הוא חזקה של ראשוני.