אינפי 4 תרגול 6

5 במאי 2015

אינטגרל משטחי מסוג ראשון:

תהי f פונקציה סקלרית מ-$\mathbb{R}^3$ ל-$\mathbb{R}$ ויהי S משטח דו מימדי ב-$\mathbb{R}^3$ הנתון ע"י הפרמטריזציה $\phi(u,v)$.

האינטגרל המשטחי של f על S מחושב על ידי:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_D f(\phi(u,v)) \cdot \|\phi_u \times \phi_v\| \, dudv$$

כאשר התחום D הוא התחום של (u,v).

ראינו שאינטגרל משטחי על משטח S של הפונקציה $f=1$ מבטא את שטח המשטח.

שימוש נוסף לאינטגרל משטחי מסוג ראשון הוא חישוב המסה של המשטח:

$$M = \iint\limits_S \rho(x,y,z)dS$$

כאשר ρ מבטאת את צפיפות המסה ליחידת שטח.

<u>תרגיל:</u>

חשבו את האינטגרלים המשטחיים הבאים:

א. $\iint_S (x+y+z)dS$ כאשר S הוא חלק המישור $x+2y+4z=4$ הנמצא באוקטנט (בעברית הוא נקרא תמן - $tomen$, שזו מילה לא רעה) הראשון (בו $x,y,z \geq 0$).

<u>פתרון:</u>

המשטח שלנו ניתן להטלה, למשל על מישור xy:

$$z(x,y)=1-\frac{x}{4}-\frac{y}{2}$$

ולכן פרמטריזציה אפשרית של המשטח היא $\phi(x,y)=(x,y,1-\frac{x}{4}-\frac{y}{2})$. במקרה זה אנו יודעים כבר ש:

$$\|\phi_x\times\phi_y\|=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}$$

הנגזרות החלקיות הן:

$$z_x=-\frac{1}{4},z_y=-\frac{1}{2}$$

ואם כן אלמנט השטח שלנו יהיה: $\|\phi_x\times\phi_y\|=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{21}}{4}$.

הפונקציה שלנו היא $f(x,y,z)=x+y+z$ ואם כן: $f(\phi(x,y))=f(x,y,1-\frac{x}{4}-\frac{y}{2})=1+\frac{3x}{4}+\frac{y}{2}$.

לכן האינטגרל שלנו יהיה:

$$\iint\limits_S(x+y+z)dS=\iint\limits_D(1+\frac{3x}{4}+\frac{y}{2})\frac{\sqrt{21}}{4}dxdy$$

מהו התחום D שלנו?

אנו רוצים בראש ובראשונה ש-$z\geq 0$, כלומר $1-\frac{x}{4}-\frac{y}{2}\geq 0$. מצד שני, גם $x,y\geq 0$ ולכן התחום שלנו הוא המשולש שקודקודיו הם הנקודות $(0,0),(0,2),(4,0)$.

במילים אחרות, התחום הוא החלק של הרביע הראשון במישור שנמצא מתחת לישר $x+2y-4=0$.

לכן אפשר להציג את התחום D כך:

$$D=\{0\leq x\leq 4-2y,0\leq y\leq 2\}$$

וסה"כ האינטגרל שלנו יהיה:

$$\iint_S (x+y+z)dS = \iint_D (1+\frac{3x}{4}+\frac{y}{2})\frac{\sqrt{21}}{4}dxdy = \int_0^2 \int_0^{4-2y} (1+\frac{3x}{4}+\frac{y}{2})\frac{\sqrt{21}}{4}dxdy =$$

$$= \frac{\sqrt{21}}{16}\int_0^2 (\frac{3x^2}{2}+2yx+4x)|_{x=0}^{x=4-2y}dy = \frac{\sqrt{21}}{6}\int_0^2 (\frac{3}{2}(4-2y)^2+2(4-2y)y+4(4-2y)dy = \ldots = \frac{7\sqrt{21}}{3}$$

ב. $\iint_S z^2dS$ כאשר S הוא שטח הפנים של החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ כאשר $z=2$ (כולל הבסיס).

<u>פתרון:</u>

נחלק את המשטח שלנו לשני משטחים; הבסיס והמעטפת, ונסמנם S_2, S_1 בהתאמה.

על הבסיס, $z=2$, ולכן האינטגרל שלנו יהיה:

$$\iint_{S_1} z^2dS = \iint_{S_1} 2^2dS = 4\cdot\iint_{S_1} dS$$

כמו שכבר ראינו, אינטגרל כזה מחשב את שטחו של המשטח. במקרה זה, המשטח הוא מעגל שרדיוסו 2, ולכן שטחו הוא 4π. אם כן:

$$\iint_{S_1} z^2dS = \iint_{S_1} 2^2dS = 4\cdot\iint_{S_1} dS = 16\pi$$

על המעטפת, המשטח ניתן להטלה: $z(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$. לכן פרמטריזציה של המשטח היא $\phi(x,y)=(x,y,\sqrt{x^2+y^2})$.

הנגזרות החלקיות הן:

$$z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ואלמנט השטח שלנו הוא:

$$\|\phi_x\times\phi_y\| = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{2}$$

הפונקציה שלנו היא $f(x,y,z)=z^2$, ולכן $f(\phi(x,y))=x^2+y^2$.

לכן האינטגרל שלנו יהיה:

$$\iint\limits_{S_2} z^2 dS = \iint\limits_{D} (x^2+y^2)\sqrt{2}dxdy$$

מהו התחום D שלנו?

האינטגראנד מתחנן שנעבור לקואורדינטות קוטביות: $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$.

החרוט שלנו הוא $z=\sqrt{x^2+y^2}=r$, ומכיוון ש־$0\le z\le 2$ בתחום שלנו, גם $0\le r\le 2$. עם הזווית אין יותר מדי הפתעות, ולכן:

$$D=\{0\le r\le 2, 0\le\theta\le 2\pi\}$$

היעקוביאן הוא כמובן r ובסה"כ האינטגרל שלנו יהיה:

$$\iint\limits_{S_2} z^2 dS = \iint\limits_{D} (x^2+y^2)\sqrt{2}dxdy = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^2 r^2\sqrt{2}rdrd\theta = 2\sqrt{2}\pi\cdot(\frac{r^4}{4})|_0^2 = 8\sqrt{2}\pi$$

ואם כן, האינטגרל שלנו הוא:

$$\iint\limits_{S} z^2 dS = \iint\limits_{S_1} z^2 dS + \iint\limits_{S_2} z^2 dS = 16\pi + 8\sqrt{2}\pi$$

ג. $\iint_S xzdS$ כאשר S הוא שפת התחום החסום ע"י $y^2+z^2\le 9$, $x+y=5$, $x=0$.

<u>פתרון:</u>

המשטח שלנו הוא בעצם שפתו של תחום שחסום בין גליל ($y^2+z^2\le 9$) ושני מישורים.

את התחום שלנו נוכל לחלק לשלושה תחומים - היכן שהמישור הראשון חותך את הגליל, היכן שהמישור השני חותך את הגליל ומה שבאמצע. כלומר:

$$S_1 := x=0, y^2+z^2\le 9, S_2 := x=5-y, y^2+z^2\le 9, S_3 := 0\le x\le 5-y, y^2+z^2\le 9$$

נחשב את האינטגרל המשטחי על כל אחד מהתחומים האלו.

על S_1, $x = 0$ ולכן:

$$\iint\limits_{S_1} xzdS = \iint 0 = 0$$

על S_2, המשטח ניתן להטלה על מישור yz: $x(y,z) = 5 - y$. כלומר, פרמטריזציה של המשטח היא $\phi(y,z) = (5-y, y, z)$.

הנגזרות החלקיות הן:

$$x_y = -1, x_z = 0$$

ולכן אלמנט השטח הוא:

$$\|\phi_x \times \phi_y\| = \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} = \sqrt{2}$$

הפונקציה שלנו היא: $f(x,y,z) = xz$ ולכן $f(\phi(y,z)) = (5-y)z$.

האינטגרל שלנו יהיה:

$$\iint\limits_{S_2} xzdS = \iint\limits_{D_2} (5-y)z\sqrt{2}dydz$$

מהו התחום D_2 שלנו?

אנו נמצאים בגליל $y^2 + z^2 \leq 9$ ולכן נעבור לקואורדינטות קוטביות:

$$y = r\cos\theta, z = r\sin\theta$$

כלומר $r^2 \leq 9$ ולכן התחום הוא: $D_2 = \{0 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

היעקוביאן הוא r ולכן האינטגרל יהיה:

$$\iint\limits_{S_2} xzdS = \iint\limits_{D_2} (5-y)z\sqrt{2}dydz = \int\limits_0^3 \int\limits_0^{2\pi} (5 - r\cos\theta) r \sin\theta r d\theta dr =$$

$$= \int\limits_0^3 \int\limits_0^{2\pi} 5r^2 \sin\theta d\theta dr - \int\limits_0^3 \int\limits_0^{2\pi} r^3 \cos\theta \sin\theta d\theta dr = \int\limits_0^3 5r^2 (\int\limits_0^{2\pi} \sin\theta d\theta) dr - \int\limits_0^3 r^3 (\int\limits_0^{2\pi} (\frac{\sin 2\theta}{2}) d\theta) dr$$

ומכיוון ש־$\int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta = 0$, נקבל:

$$\iint\limits_{S_2} xzdS = 0$$

על S_3, פרמטריזציה של המשטח תהיה:

$$\phi(x,\theta) = (x, 3\cos\theta, 3\sin\theta)$$

כאשר $x \in [0, 5-y]$ כלומר $x \in [0, 5 - 3\sin\theta]$.

וקטורי הנגזרות החלקיות הם:

$$\phi_x = (1,0,0), \phi_\theta = (0, -3\sin\theta, 3\cos\theta)$$

המכפלה הוקטורית תהיה:

$$\phi_x \times \phi_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3\sin\theta & 3\cos\theta \end{vmatrix} = i \cdot 0 - j \cdot 3\cos\theta + k \cdot 3\sin\theta = (0, -3\cos\theta, -3\sin\theta)$$

ולכן אלמנט השטח יהיה:

$$\|\phi_x \times \phi_\theta\| = \sqrt{0^2 + 9\cos^2\theta + 9\sin^2\theta} = 3$$

הפונקציה שלנו היא $f(x,y,z)=xz$, ולכן $f(\phi(x,\theta))=3x\cos\theta$.

האינטגרל שלנו יהיה:

$$\iint\limits_{S_3} xzdS=\iint\limits_{D_3} 3x\cos\theta dxd\theta$$

התחום D_3 שלנו הוא:

$$D_3=\{0\leq x\leq 5-3\sin\theta, 0\leq\theta\leq 2\pi\}$$

ולכן האינטגרל הוא:

$$\iint\limits_{S_3} xzdS=\iint\limits_{D_3} 3x\cos\theta dxd\theta=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{5-3\sin\theta} 3x\cos\theta dxd\theta=3\int\limits_0^{2\pi}\cos\theta\cdot(\frac{x^2}{2})|_0^{5-3\sin\theta}d\theta=$$

$$3\int\limits_0^{2\pi}\frac{(5-3\sin\theta)^2}{2}\cos\theta d\theta=\frac{75}{2}\int\limits_0^{2\pi}\cos\theta d\theta+\frac{27}{2}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos\theta d\theta-30\int\limits_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta d\theta$$

כעת,

$$\int\limits_0^{2\pi}\cos\theta d\theta=0$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta d\theta=\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin 2\theta}{2}d\theta=0$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos\theta d\theta=\frac{\sin^3\theta}{3}|_0^{2\pi}=0$$

ואם כן:

$$\iint\limits_{S_3} xzdS=0$$

ובסה"כ, האינטגרל שלנו הוא:

$$\iint\limits_{S} xzdS = \iint\limits_{S_1} xzdS + \iint\limits_{S_2} xzdS + \iint\limits_{S_3} xzdS = 0 + 0 + 0 = 0$$