הערה

מעכשיו, או ש $\Omega -$ בכל זאת סופית או בת מניה ואז $\mathcal{F}=\mathbb{P}(\Omega)$ או ש - $\Omega=\mathbb{R}$ עם ה $- \sigma'' -$ אלגברה של בורל".

הגדרה (1)

ה $\sigma -$ אלגברה של בורל היא ה $\sigma -$ אלגברה הקטנה ביותר על $\mathbb{R}$ המכילה את כל הקרניים $(-\infty,b]$.

הגדרה (2)

(הגדרה אינדוקטיבית) נסמן ב - B_0 אם אוסף הקרניים $(\infty,b]$; לכל $1\le n$, B_n הוא אוסף הקבוצות שהן משלים או איחוד בן מניה של איברים של $B_0\cup B_1\cup\cdots\cup B_{n-1}$. בסופו של דבר:

$$B=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$$

דוגמה

דוגמאות לקבוצות שנמצאות ב $- B$:

1. $(-\infty,b]$
2. $(a,\infty)=(-\infty,a]^c$
3. $(-\infty,b)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty,b-\frac{1}{n})$
4. $[b,\infty)=(-\infty,b)^c$
5. $(a,b),(a,b],[a,b),[a,b]$
6. $\mathbb{R}=\bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty,n]$
7. $\phi=\mathbb{R}^c$
8. $\{a\}=(-\infty,a]\cap[a,\infty)$

תרגיל

ה $\sigma -$ אלגברה של בורל נוצרת על ידי הקטעים הפתוחים באורך 1.

המרחב הסתברות שמוגדר הוא $(\mathbb{R},B,P)$

הגדרה

משתנה מקרי על מרחב הסתברות כללי $(\Omega,\mathcal{F})$ הוא פונקציה $X:\Omega\to\mathbb{R}$ כך שלכל $B\in\mathcal{B}$,

$$X^{-1}(B)=\{\omega|X(\omega)\in B\}=\mathcal{F}\Leftrightarrow\forall b\in\mathbb{R}:X^{-1}\big((-\infty,b]\big)=\{\omega|X(\omega)\le b\}\in\mathcal{F}$$

כלומר, לכל b קיים הערך $P(\{\omega|X(\omega)\le b)=P(X\le b)$.

דוגמה

דוגמה 3:

$$P(X < b) = \lim_{n\to\infty} P\left(X \le b - \frac{1}{n}\right)$$

דוגמה 2: $P(a < X) = 1 - P(X \le a)$

הערה

אם $A \subseteq \Omega$

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c \cup \phi \cup \phi \cup \cdots) = P(A) + P(A^c)$$

דוגמה 8:

$$P(X = b) = P(X \le b) - \lim_{n\to\infty} P\left(X \le b - \frac{1}{n}\right)$$

דוגמה

פונקציית הזהות היא משתנה מקרי $(\mathbb{R}, B) \to (\mathbb{R}, B)$

הגדרה

יהי X משתנה מקרי. פונקציית ההצטברות של X היא הפונקציה

$$F_X: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

המוגדרת על ידי:

$$F_X(b) = P(X \le b)$$

גם להיפך: הפונקציה F_X מגדירה את ההסתברויות $P(X \in B)$ לכל $B \in \mathcal{B}$.

הגדרה

פונקציה $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ נקראת פונקציית הצטברות אם:

1. F מונוטונית עולה (במובן החלש)
2. $\lim_{n\to\infty} F(x) = 1$
3. $\lim_{n\to-\infty} F(x) = 0$
4. F רציפה מימין.

טענה

לכל משתנה מקרי, F_X באמת פונקציית הצטברות.

הוכחה

1. אם $b \le b'$,

$$\{\omega, X(\omega) \le b\} \subseteq \{\omega | X(\omega) \le b'\}$$
$$\Rightarrow F_X(b) = P(\{\omega, X(\omega) \le b\}) \le P(\{\omega | X(\omega) \le b'\}) = F_X(b')$$

2. $\cup\{X \le n\} = \Omega$ ולכן $\lim_{n\to\infty} F_X(x) = \lim_{n\to\infty} F_X(n) = \lim P(X \le n) = P(\Omega) = 1$

3.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\{X \le -n\} = \phi$$
$$\Rightarrow \cdots = \lim P(X \le -n) = P(\phi) = 0$$

4. נבחר סדרה $x_n \to X_0$ מלמעלה; אפשר להניח ש - x_n סדרה יורדת. סדרת המאורעות $\{X \le x_n\}$ יורדת לכן

$$F_X(x_0) = P(X \le x_0) = P(\cap\{X \le x_n\}) = \lim_{n\to\infty} P(X \le x_n) = \lim_{n\to\infty} F_X(x_n)$$

המחשה

הערה

הקבוצה בנקודה b:

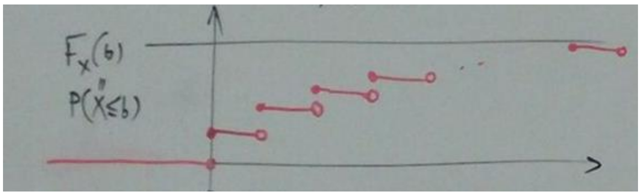
$$F_X(b) - \lim_{x\to b^-} F_X(x) = P(X \le b) - P(X < b) = P(X = b)$$

הערה

F_X רציפה (לא רק מימין) $\Leftrightarrow \forall b: P(X = b) = 0$

דוגמאות

נתבונן בהתפלגות פואסון, $X = 0,1,2,\cdots$



כך נראה משתנה בדיד.

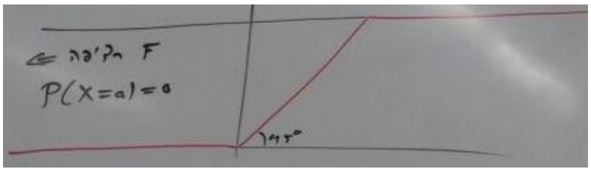
$$\cup \left\{X \leq b - \frac{1}{n}\right\} = \{X < b\}$$

$$\cap \left\{X \leq b + \frac{1}{n}\right\} = \{X \leq b\}$$

הערה

מספר נקודות אי הרציפות של פונקציית הצטברות הוא לכל היותר $\aleph_0$

דוגמה



$$P(X \leq b) = F_X(b) = \begin{cases} 0, & b \leq 0 \\ b, & 0 \leq b \leq 1 \\ 1, & b \geq 1 \end{cases}$$

תמיד: $(a < b)$ $\quad P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

$$P(a \leq X \leq b) = b - a$$

לכל $0 \leq a \leq b \leq 1$, $P(a \leq X \leq b) = b - a$

הערה

קבוצת נקודות אי – הגזירות של פונקציית הצטברות היא:

1. ממידה אפס
2. עלולה להיות מעוצמה

הגדרה

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ נקראת פונקציית צפיפות אם:

- היא חיובית,
- בנוסף,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{n}^{n} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

תהי f פונקציית צפיפות. נגדיר

$$F(b) = \int_{-\infty}^{b} f(t)dt$$

מסתבר שזו פונקציית הצטברות גזירה.

סיכום

לסיכום, אם f פונקציית צפיפות, אפשר להגדיר משתנה מקרי X לפי

$$F_X(b) = P(X \le b) = \int_{-\infty}^{b} f(t)dt$$

במקרה כזה,

$$P(a \le X \le b) = \int_{a}^{b} f(t)dt$$

$$P(X = a) = 0$$

אפשר לשחזר את f מתוך X על ידי $f(x) = \frac{d}{dx}F_X(x)$.