גאומטריה דיפרנציאלית 1 – תרגיל 1 (הסכם הסכימה של איינשטיין)

המלצה: בכל התרגילים של סכימת איינשטיין, ראשית רישמו מי הם אינדקסי הסכימה ומי הם האינדקסים החופשיים.

שאלה 1 פשטו ככל הניתן את הביטויים הבאים. הניחו כי כל הוקטורים הם ב- $\mathbb{R}^3$ וכי כל המטריצות הן ב- $M_{3x3}(\mathbb{R})$.

א) $\delta^a{}_b g_{ca} g^{bd} \delta^c{}_d$
ב) $\delta^i{}_j g_{ik} \delta^k{}_m$
ג) $\delta_{ij} u^i v^j$
ד) $a^i{}_j b^j{}_k c^k{}_m d^m{}_n$
ה) $u^k v^{\underline{n}} \delta^i{}_{\underline{n}}$
ו) $\delta_{ij} a^{ij}$
ז) $g^{1a} g_{a1}$
ח) $\delta^i{}_j \delta^j{}_k \delta^k{}_i$
ט) $\delta^1{}_a \delta^a{}_b \delta^b{}_c \delta^c{}_d \delta^d{}_2$

פתרון:

א) סוכמים על a,b,c,d , ואין חופשיים.
$\delta^a{}_b g_{ca} g^{bd} \delta^c{}_d = ?$. נסתכל ראשית על $\delta^a{}_b g_{ca}$. סוכמים על a . הביטוי לא יתאפס רק כאשר $a=b$ לכן $\delta^a{}_b g_{ca} = g_{cb}$. באותו האופן: $\delta^a{}_b g_{ca} g^{bd} \delta^c{}_d = (\delta^a{}_b g_{ca})(g^{bd}\delta^c{}_d) = g_{cb} g^{bc} = \delta^c{}_c = Tr(I_3) = 3$.

ב) סוכמים על i,k , חופשיים הם j,m . בדומה לא': $\delta^i{}_j g_{ik} \delta^k{}_m = (\delta^i{}_j g_{ik})\delta^k{}_m = g_{jk}\delta^k{}_m = g_{jm}$.
או לחלופין: $\delta^i{}_j g_{ik} \delta^k{}_m = \delta^i{}_j (g_{ik}\delta^k{}_m) = \delta^i{}_j g_{im} = g_{jm}$ (כמובן קיבלנו אותה התשובה בשתי הדרכים כי כפל מספרים ממשיים הוא אסוציאטיבי)

ג) סכימה: i,j (אין חופשיים). $\delta_{ij} u^i v^j = \sum_{i=1}^{3} u^i v^i = u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3 = \langle u, v \rangle$

ד) סכימה: j, k, m. חופשיים: i, n.
אם נסמן $(t^i{}_j) = T = ABCD$ אז נוכל לרשום: $a^i{}_j b^j{}_k c^k{}_m d^m{}_n = t^i{}_n$. כי לפי הגדרת כפל מטריצות:
$a^i{}_j b^j{}_k c^k{}_m d^m{}_n = (ab)^i{}_k c^k{}_m d^m{}_n = (abc)^i{}_m d^m{}_n = (abcd)^i{}_m$

ה) סכימה: אין (לא סוכמים על n !), חופשיים: i,n,k .
לכן אין דרך לפשט את $u^i v^n \delta^i{}_{\underline{n}}$.
(לפי הגדרת הדלטא של קרונקר ניתן לרשום מפורשות: עבור $i=\underline{n}$: $u^k v^n \delta^i{}_{\underline{n}} = u^k v^i$, ועבור $i \neq \underline{n}$: $u^k v^n \delta^i{}_{\underline{n}} = 0$)

ו) סכימה: i,j . $\delta_{ij} a^{ij} = a^{11} + a^{22} + a^{33} = tr(A^{-1})$

ז) סכימה: a.
$g^{1a} g_{a1} = \delta^1{}_1 = 1$

ח) סכימה: i,j,k (אין חופשיים). $\delta^i{}_j \delta^j{}_k \delta^k{}_i = (\delta^i{}_j \delta^j{}_k)\delta^k{}_i = \delta^i{}_k \delta^k{}_i = \delta^i{}_i = Tr(I_3) = 3$. כמובן אפשר גם:
$\delta^i{}_j \delta^j{}_k \delta^k{}_i = \delta^i{}_j (\delta^j{}_k \delta^k{}_i) = \delta^i{}_j \delta^j{}_i = \delta^i{}_i = Tr(I_3) = 3$.

ט) סכימה: a,b,c,d (אין חופשיים). $\delta^1{}_a \delta^a{}_b \delta^b{}_c \delta^c{}_d \delta^d{}_2 = \delta^1{}_b \delta^b{}_c \delta^c{}_d \delta^d{}_2 = \delta^1{}_c \delta^c{}_d \delta^d{}_2 = \delta^1{}_d \delta^d{}_2 = \delta^1{}_2 = 0$

שאלה 2 כיתבו את הביטויים הבאים ללא סימוני סימטריזציה ואנטיסימטריזציה, ועבור כל ביטוי ציינו מי הם האינדקסים החופשיים ומי הם אינדקסי הסכימה.

א) $a^i{}_j g^{k[m} b^{n]}$

ב) $L_{\{a\underline{c}\}} g^{ab} g_{b\underline{c}}$

ג) $\delta^i{}_{\{j}\delta^j{}_{k\}}\delta^k{}_m$ (ב- $\mathbb{R}^3$)

פתרון:

א) כל האינדקסים חופשיים.

$$a^i{}_j g^{k[m}b^{n]} = a^i{}_j g^{km} b^n - a^i{}_j g^{kn} b^m$$

ב) סכימה: a,b. חופשיים: c.

$$L_{\{a\underline{c}\}} g^{ab} g_{b\underline{c}} = L_{\{a\underline{c}\}}\delta^a{}_{\underline{c}} = L_{\{\underline{c}\underline{c}\}} = \frac{1}{2}(L_{\underline{c}\underline{c}}+L_{\underline{c}\underline{c}}) = L_{\underline{c}\underline{c}}$$

ג) סכימה: j , k, חופשיים i,m.

$$\delta^i{}_{\{j}\delta^j{}_{k\}}\delta^k{}_m = \frac{1}{2}(\delta^i{}_j\delta^j{}_k\delta^k{}_m + \delta^i{}_k\delta^j{}_j\delta^k{}_m) = \frac{1}{2}(\delta^i{}_m + Tr(I_n)\delta^i{}_m) = \frac{1}{2}(\delta^i{}_m+3\delta^i{}_m) = 2\delta^i{}_m$$

שאלה 3 יהיו $A=(a^i{}_j)$, $B=(b^i{}_j)$ מטריצות. נסמן $C=AB$.

א) הראו כי $2a^i{}_{[j}b^j_{k]} = c^i{}_k - a^i{}_k Tr(B)$ לכל $1\le i,k\le n$.

ב) הראו כי $2a^{[i}_j b^{j]}_k = c^i{}_k - b^i{}_k Tr(A)$ לכל $1\le i,k\le n$.

ג) נתון כי $Tr(A)=Tr(B)\neq 0$. הראו כי $A=B$ אמ"מ לכל $1\le i,k\le n$ מתקיים $a^i{}_{[j}b^j_{k]} = a^{[i}_j b^{j]}_k$.

פתרון

א) נפתח את צד שמאל:
בצד שמאל, סוכמים על j והחופשיים הם i,k. לכן:

$$2a^i{}_{[j}b^j_{k]} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot(a^i{}_j b^j_k - a^i{}_k b^j_j) = c^i{}_k - a^i{}_k Tr(B).$$

ב) כמובן אותם אינדקסי סכימה/חופשיים כמו בסעיף א'. הפתרון דומה:

$$2a^{[i}_j b^{j]}_k = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot(a^i{}_j b^j_k - a^j{}_j b^i_k) = c^i{}_k - b^i{}_k Tr(A).$$

ג) כמובן $a^i{}_{[j}b^j_{k]}=a^{[i}_jb^{j]}_k$ אמ"מ $2a^i{}_{[j}b^j_{k]} = 2a^{[i}_jb^{j]}_k$ אמ"מ (לפי א'+ב') $a^i{}_k Tr(B) = b^i{}_k Tr(A)$ אמ"מ (כי נתון כי $Tr(A)=Tr(B)\neq 0$) $a^i{}_k=b^i{}_k$.
לכן $a^i{}_{[j}b^j_{k]}=a^{[i}_jb^{j]}_k$ לכל $1\le i,k\le n$ אמ"מ $A=B$.

שאלה 4

א) נניח כי $(\delta^i{}_j)$ היא מטריצת היחידה מסדר $7x7$. פשטו ככל הניתן את $\delta^i{}_{\{j}\delta^j{}_{i\}}$.

ב) נתון כי $\delta^i{}_{\{j}\delta^j{}_{i\}}=3$. כמה שורות יש למטריצה $(\delta^i{}_j)$?

פתרון:

א) אינדקסי סכימה: i,j (אין חופשיים). אם עובדים ב- $\mathbb{R}^n$ נקבל:

$$\delta^i{}_{\{j}\delta^j{}_{i\}}=\frac{1}{2}(\delta^i{}_j\delta^j{}_i+\delta^i{}_i\delta^j{}_j)=\frac{1}{2}(\delta^i{}_i+\delta^i{}_i\delta^j{}_j)=\frac{1}{2}(Tr(I_n)+Tr(I_n)^2)=\frac{1}{2}(n+n^2)$$

כלומר עבור $n=7$ נקבל $\delta^i{}_{\{j}\delta^j{}_{i\}}=28$.

ב) לפי החישוב מסעיף א' נקבל $\frac{1}{2}(n+n^2)=3$ כלומר $n=2$ כלומר $(\delta^i{}_j)\in M_{2x2}(\mathbb{R})$.

<u>שאלה 5</u>

א) יהיו $A,B\in M_{nxn}(\mathbb{R})$. הראו כי $tr(AB)=tr(BA)$. (השתמשו בהסכם הסכימה של איינשטיין).

ב) יהיו $A,B,C\in M_{nxn}(\mathbb{R})$. הראו כי $A(B+C)=AB+AC$. (השתמשו בהסכם הסכימה של איינשטיין).

ג) הראו כי (a_{ij}) מטריצה סימטרית אמ"מ $a_{[ij]}=0$ לכל i,j , וכי היא אנטי-סימטרית אמ"מ $a_{\{ij\}}=0$ לכל i,j.

<u>פתרון:</u>

א) נסמן $BA=D, AB=C$. אז:

$$tr(AB)=tr(C)=c^i{}_i=a^i{}_kb^k{}_i=b^k{}_ia^i{}_k=d^k{}_k=tr(D)=tr(BA)$$

המעבר האמצעי הוא לפי קומוטטיביות המספרים הממשיים.

ב) האיבר ה- i,j של צד שמאל הוא: $a^i{}_k(b^k{}_j+c^k{}_j)$. האיבר ה-i,j של צד ימין הוא: $a^i{}_kb^k{}_j+a^i{}_kc^k{}_j$. שני הצדדים שווים לפי דיסטריביוטיביות של מספרים ממשיים.

ג) (a_{ij}) סימטרית אמ"מ $a_{ij}=a_{ji}$ לכל i,j , כלומר $a_{ij}-a_{ji}=0$ לכל i,j , כלומר $2a_{[ij]}=0$ לכל i,j , כלומר $a_{[ij]}=0$ לכל i,j. באופן דומה עבור אנטי-סימטרית.