

## דף תרגילים 9

**תרגיל 1** להזכירכם הנגזרת הכיוונית של  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  בנקודה  $p \in \mathbb{R}^n$  בכיוון וקטור  $v \in \mathbb{R}^n$  היא  $\nabla_v f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ \alpha(t)$  כאשר  $\alpha(t)$  עקומה המקיימת  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha'(0) = v$ . הראו כי אם  $\alpha$  מתארת קו ישר בכיוון וקטור  $v$  עם  $\alpha(0) = p$  אז מתקבלת ההגדרה של נגזרת כיוונית מאינפלי 3.

### תרגיל 2

א. הראו כי הנורמל למשטח  $ax + by + cz + d = 0$  ( $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ ) הוא

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

ב. הסיקו כי העתקת ווינגרטון של המישור  $ax + by + cz + d = 0$  היא העתקת האפס.

### תרגיל 3

נתון המשטח המוגדר ע"י המשוואה

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 4\}$$

חשבו את העתקת ווינגרטון של  $M$ .

**תרגיל 4** נתונה הפונקציה  $f(x, y) = 6x^2 + 8xy + 2y^2$ .

א. חשבו את העתקת ווינגרטון של הגרף של הפונקציה  $f$  בנקודה  $p = (0, 0, 0)$ .

ב. כיצד נראה המשטח בנקודה  $p = (0, 0, 0)$ ?

**תרגיל 5** נתון המשטח  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  עם פרמטריזציה  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  כאשר  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ ,

עם המטריקה  $(g_{ij}) = \frac{1}{y^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . חשבו את האורך (במידה וקיים) של העקומות  $\beta_i = x \circ \alpha_i$  במקרים הבאים:

א.  $\alpha_1(t) = (\cos t, \sin t)$  כאשר  $t \in [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ .

ב.  $\alpha_2(t) = (\cos t, \sin t)$  כאשר  $t \in [0, \pi]$ .

ג.  $\alpha_3(t) = (1, t)$  כאשר  $t \in (0, 1)$ .

שימו לב כי יתכן ותקבלו אורך אינסופי עבור חלק מהעקומות.

ד. חשבו את השטח של פרמטריזציה  $x$  בתחום  $D$ , כאשר

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), x^2 + y^2 > 1, y > 0 \right\}$$

**תרגיל 6** נתבונן במשטח  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  המוגדר ע"י

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 1\}$$

א. מיצאו פרמטריזציה של עקומה  $\alpha(s)$  במהירות יחידה במישור  $xz$  כך ש-  $M$  משטח סיבוב (סביב ציר  $z$ ) של  $\alpha$ .

ב. חשבו את התבנית היסודית הראשונה של הפרמטריזציה שמצאתם.

ג. חשבו את השטח הכולל של המשטח  $M$ :

$$\text{area}(M) = \int_M dA$$

**תרגיל 7** נתבונן במשטח  $M$  שהוא ספירה ב-  $\mathbb{R}^3$  בעלת רדיוס 6 שמרכזה בראשית הצירים. יהי

$-6 < a < 6$ . נסמן  $\gamma_a$  עקומת החיתוך של  $M$  ושל המישור  $\{z = a\}$ .

א. מיצאו פרמטריזציה מהירות יחידה של  $\gamma_a$ .

ב. עבור איזה ערך של  $a$  העקומה הנ"ל היא עקומה גאודזית של  $M$ ?

ג. עבור הערך של  $a$  שהוא הפתרון של סעיף ב', נסמן  $b = a + 1$ . קיימת ספירה עבורה  $\gamma_b$  היא

עקומה גאודזית. מיצאו פרמטריזציה של ספירה זו.