תרגיל בית 2 בשדות ותורת גלואה
88-311 סמסטר א' תש"ף

שאלה 1. יהיו $f(x) = x^2 - 3x + 3, g(x) = x^3 + 2x + 5 \in \mathbb{Q}[x]$.
תזכורת: אלגוריתם אוקלידס המורחב עובד בתחומים אוקלידיים כמו $F[x]$.

א. מצאו את $\gcd(f(x), g(x))$.

ב. מצאו את ההופכי של $g(x)$ בשדה $\mathbb{Q}[x]/\langle f(x) \rangle$.

שאלה 2. תהי K/F הרחבת שדות. נתבונן בחוג הפולינומים $K[x]$ ובשדה הפונקציות הרציונליות $F(x)$, ונחשוב על שניהם כתת־קבוצות של השדה $K(x)$ באופן הברור. הוכיחו $F(x) \cap K[x] = F[x]$.

שאלה 3. תהי K/F הרחבת שדות. יהי $f(x) \in F[x]$ פולינום מדרגה $n \geq 1$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם a איבר אלגברי מעל K אז הוא אלגברי מעל F.

ב. אם a איבר אלגברי מעל F אז הוא אלגברי מעל K.

ג. אם a איבר אלגברי מעל F אז גם $\alpha \cdot a$ הוא אלגברי לכל $\alpha \in F$.

שאלה 4. תהי K/F הרחבה סופית (כלומר $[K:F] < \infty$). הוכיחו כי כל איבר של K הוא אלגברי מעל F. רמז: חשבו על הקבוצה $\left\{1, a, a^2, a^3, \dots\right\}$.
רשות: להרחבה כמו בשאלה קוראים הרחבה אלגברית. האם כל הרחבה אלגברית היא סופית?

שאלה 5. הוכיחו כי $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$.

שאלה 6. יהי F שדה, ותהי $G \leq F^*$ תת־חבורה סופית של החבורה הכפלית של השדה. הוכיחו כי G ציקלית. הדרכה: העזרו בתורת המבנה של חבורות אבליות סופיות ובחישוב $\exp(G)$.

בהצלחה!