אנליזה מודרנית תש"ף - תרגול 6

4 בדצמבר 2019

משפט (משפט ההתכנסות הנשלטת): תהיינה $f_n : X \to \mathbb{R}^*$ פונקציות מדידות, כך ש־ $f_n \to f$. נניח שקיימת פונקציה אינטגרבילית $g : X \to [0, \infty]$ כך ש־$|f_n| \leq g$ לכל n. אז הפונקציות f_n ו־f אינטגרביליות, ומתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

משפט (משפט ההתכנסות החסומה): תהי $E \subseteq X$ מדידה עם $\mu(E) < \infty$, ותהי $f_n : E \to \mathbb{R}$ סדרת פונקציות מדידות. נניח שקיים $M > 0$ כך שלכל n, $|f_n| \leq M$, ונניח $f_n \to f$. אז

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$$

תרגיל: חשבו את הגבול

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{n \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x\left(x^2+1\right)} dm$$

פתרון: (אמנם עוד לא ראינו בהרצאה את ההכללות של לבג לאינטגרל רימן). נגדיר סדרת פונקציות $f_n(x) = \frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(x^2+1)}$. אלו פונקציות מדידות. כמו כן, לכל $x \neq 0$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}\right) = 1$ ולכן

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}\right) * \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1}$$

כמעט בכל מקום. נזכור כי $|\sin(x)| \leq |x|$ לכל x, ולכן

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} * \frac{1}{x^2+1}\right| = \left|\frac{\left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right|}{\left|\frac{x}{n}\right|} * \frac{1}{x^2+1}\right| \leq \frac{1}{x^2+1}$$

נסמן $g(x)=\frac{1}{x^2+1}$, אז $|f_n|\le g$ לכל n. כעת ממשפט ההתכנסות הנשלטת,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x\left(x^2+1\right)}dm=\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{x^2+1}dm=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+1}dx=\tan^{-1}(x)\,|_{-\infty}^{\infty}=\pi$$

טענה: הכללה למשפט ההתכנסות הנשלטת - תהיינה f_n, g_n סדרות פונקציות מדידות כך ש־$f_n\to f$ וכן $g_n\to g$ כמעט בכל מקום, וכל הפונקציות אינטגרביליות. נניח כי $|f_n|\le g_n$ לכל n וגם $\int_X g_n d\mu\to\int_X g d\mu$. הוכיחו כי $\int_X f_n d\mu\to\int_X f d\mu$.

הוכחה: נעקוב אחרי ההוכחה של למת פאטו ההפוכה. נגדיר סדרה $h_n=g_n-f_n$. זו סדרה של פונקציות אי־שליליות ולכן מהלמה של פאטו $\int_X \underline{\lim} h_n d\mu\le\underline{\lim}\int_X h_n d\mu$. מצד אחד,

$$\int_X\underline{\lim}h_n d\mu=\int_X\underline{\lim}\left(g_n-f_n\right)d\mu=\int_X g-fd\mu=\int_X gd\mu-\int_X fd\mu$$

מצד שני

$$\underline{\lim}\int_X h_n d\mu=\underline{\lim}\int_X g_n d\mu-\overline{\lim}\int_X f_n d\mu=\int_X gd\mu-\overline{\lim}\int_X f_n d\mu$$

נחסיר את $\int_X gd\mu$ משני האגפים ונקבל $\int_X fd\mu\ge\overline{\lim}\int_X f_n d\mu$. כעת, כדי להראות את אי־השוויון ההפוך נגדיר סדרה $h_n=g_n+f_n$. זו סדרה של פונקציות אי־שליליות, אז שוב נוכל להפעיל את הלמה של פאטו. מצד אחד,

$$\int_X\underline{\lim}h_n d\mu=\int_X\underline{\lim}\left(g_n+f_n\right)d\mu=\int_X g+fd\mu=\int_X gd\mu+\int_X fd\mu$$

מצד שני

$$\underline{\lim}\int_X h_n d\mu=\underline{\lim}\int_X g_n d\mu+\underline{\lim}\int_X f_n d\mu=\int_X gd\mu+\underline{\lim}\int_X f_n d\mu$$

נחסיר את $\int_X gd\mu$ משני האגפים ונקבל $\int_X fd\mu\le\underline{\lim}\int_X f_n d\mu$. אם נסכם, קיבלנו כי

$$\overline{\lim}\int_X f_n d\mu\le\int_X fd\mu\le\underline{\lim}\int_X f_n d\mu$$

לכן הגבול קיים ומתקיים $\lim\int_X f_n d\mu=\int_X fd\mu$.

תרגיל: תהיינה $f_n:X\to\mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות, כך ש־$f_n\to f$ במידה שווה. הראו כי אם $\mu(X)<\infty$ אז f גם אינטגרבילית ומתקיים $\int_X f_n d\mu\to\int_X fd\mu$.

הוכחה: כיוון שההתכנסות היא במידה שווה, לכל $\varepsilon>0$ קיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים $|f-f_n|<\varepsilon$. נסמן $h_n=f-f_n$. לפי משפט ההתכנסות החסומה, f אינטגרבילית ומתקיים

$$\int_X fd\mu-\lim\int_X f_n d\mu=\lim\int_X h_n d\mu=\int_X\lim\left(f-f_n\right)d\mu=0$$

לכן $\int_X fd\mu=\lim\int_X f_n d\mu$.

תרגיל: תהי $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית ותהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ חסומה, מדידה לבג ורציפה בנקודה 1. הראו כי הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} f\left(1+\frac{x}{n^2}\right) g\left(x\right) dx$$

קיים, וחשבו אותו.

פתרון: נשים לב שאפשר לכתוב את האינטגרל בצורה הבאה: $\int_{\mathbb{R}} f\left(1+\frac{x}{n^2}\right) g\left(x\right) \mathbb{1}_{(-n,n)} dx$. לכן נגדיר את סדרת הפונקציות $h_n\left(x\right)=f\left(1+\frac{x}{n^2}\right) g\left(x\right) \mathbb{1}_{(-n,n)}$, שהן פונקציות מדידות. f רציפה בנקודה 1 ולכן $\lim_{n\to\infty} f\left(1+\frac{x}{n^2}\right)=f\left(1\right)$. כלומר קיימת פונקצית הגבול $h\left(x\right)=f\left(1\right)g\left(x\right)$. יהי M חסם של הפונקציה f. אז $\left|h_n\right|\le M\left|g\right|$. הפונקציה בצד ימין אינטגרבילית, ולכן לפי משפט ההתכנסות הנשלטת $\lim_{n\to\infty}\int_X h_n d\mu=\int_X h d\mu= f\left(1\right)\int_{\mathbb{R}} g\left(x\right) dx$ וזה הגבול שרצינו לחשב.

תרגיל: תהיינה $f,f_n:X\to\mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות, כך ש־$f_n\to f$ כמעט בכל מקום. הוכיחו כי $\int_X \left|f_n\right| d\mu\to\int_X\left|f\right| d\mu$ אם ורק אם $\int_X\left|f-f_n\right| d\mu\to 0$.

פתרון: נניח כי $\int_X\left|f-f_n\right| d\mu\to 0$. אז מאי שוויון המשולש ההפוך וממונוטוניות נקבל

$$\int_X\left|f_n-f\right| d\mu\ge\int_X\left|\left|f_n\right|-\left|f\right|\right| d\mu\ge\left|\int_X\left|f_n\right|-\left|f\right| d\mu\right|=\left|\int_X\left|f_n\right| d\mu-\int_X\left|f\right| d\mu\right|$$

לכן

$$0=\lim\int_X\left|f_n-f\right| d\mu\ge\lim\left|\int_X\left|f_n\right| d\mu-\int_X\left|f\right| d\mu\right|$$

כלומר $\int_X\left|f_n\right| d\mu\to\int_X\left|f\right| d\mu$. כעת נוכיח את הכיוון השני. נגדיר $g_n=\left|f\right|+\left|f_n\right|\ge\left|f-f_n\right|$. אז g_n אינטגרביליות וכן $g_n\to g=2\left|f\right|$ כמעט בכל מקום. לפי ההנחה, $\int_X g_n d\mu\to\int_X g d\mu$. נוכל להפעיל את ההכללה של משפט ההתכנסות הנשלטת שהוכחנו קודם ולקבל כי $\lim\int_X\left|f_n-f\right| d\mu=\int_X\lim\left|f_n-f\right| d\mu=0$.