מערכות מד"ר מסדר ראשון

האקפוננט המטריצי

M מטריצה $n \times n$.

$$\exp(M) = I + M + \frac{M^2}{2!} + \frac{M^3}{3!} + ... = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{M^i}{i!}$$

איך מוכיחים/מחשבים התכנסות?

(1) אם $M = UDU^{-1}$ אזי $\exp(M) = U\exp(D)U^{-1}$ ולכן מספיק לחשב/להוכיח כאשר D בצורה נורמלית של ז'ורדן.

(2) $M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$ מטריצת בלוקים, אזי $\exp(M) = \begin{pmatrix} \exp(M_1) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(M_2) & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$
ולכן מספיק לחשב/להוכיח לבלוק אחד של ז'ורדן.

(3) אם $M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\exp(M) = e^{\lambda} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \dots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$(\exp(M))_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{(j-i)!} & j \geq i \\ 0 & J < i \end{cases}$$

פתרון מערכות מד"ר מסדר ראשון

עבור $n = 2$

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + b_1(t) \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + b_2(t) \end{cases}$$

כאשר $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ קבועים.
$b_1(t) = b_2(t) = 0$ - מקרה הומוגני.

עבור n כללי

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}(t)$$

A מטריצה קבועה

$$\vec{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\vec{b}(t) = 0$ מקרה הומוגני.

מקרה הומוגני: $\vec{y}' = A\vec{y}$

טענה

הפתרון הכללי הוא $\vec{y}(t) = \exp(tA)\,\vec{y}(0)$ (כאשר $\vec{y}(0)$ קבועים חופשיים)

הוכחה

(בהנחה שניתן לגזור את הטור האינספי הרלוונטי איבר איבר) רוצים לבדוק ש$\vec{y}(t)$ המוצע מקיים את המשוואה:

$$\vec{y}(t) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(tn)^i}{i!}\right)\vec{y}(0)$$

$$\begin{aligned}\vec{y}'(t) &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^{i-1}A^i}{(i-1)!}\right)\vec{y}(0) = A\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^{i-1}A^{i-1}}{(i-1)!}\right)\vec{y}(0) \\ &= A\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^jA^j}{j!}\right)\vec{y}(0) = A\vec{y}(t)\end{aligned}$$

הבעיה

קשה לחשב את צורת ז'ורדן של מטריצה At

קיצורים לפתרון: $\vec{y}' = A\vec{y}$

1. אם לA יש ע"ע λ עם ו"ע $\vec{v}$ אזי $\vec{y} = e^{\lambda t}\vec{v}$ הוא פתרון. (הוכחה: $\vec{y}' = \lambda e^{\lambda t}\vec{v} \overset{(A\vec{v}=\lambda\vec{v})}{=} A\vec{v}e^{\lambda t} = A\vec{y}$)
אם יש לA n ע"עים שונים, זה נותן n פתרונות בת"ל שניתן לצרף לפתרון הכולל.

אזהרה: אולי λv מרוכבים!
אם A ממשי וλ ע"ע מרוכבים עם ו"ע $\vec{v}$ אזי גם $\overline{\lambda}$ ע"ע עם ו"ע $\overline{\vec{v}}$.
$C_1 e^{\lambda t}\vec{v} + C_2 e^{\overline{\lambda}}\overline{\vec{v}}$ ממשי אם $\overline{C_1} = C_2$ [$z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}\,(z)$]

2. אם יש לA ע"עים החוזרים על עצמם (עם ריבוי גיאומטרי לא שווה לריבוי אלגברי)
אזי יש לA בלוק ז'ורדן לא טריוויאלי $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$. ניתן לבדוק ש:

$$\exp\left(t\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = e^{t\lambda}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ & & & \ddots & t \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

באופן כללי אם יש לA ע"ע λ החוזר על עצמו r פעמים - יש לחפש פיתרון של $\vec{y}' = A\vec{y}$ מהצורה $\vec{y} = e^{\lambda t}\left(\vec{v_1} + \vec{v}_2 t + \vec{v}_3 t^2 + ... + \vec{v}_r t^{r-1}\right)$ כאשר $\vec{v}_1, ...\vec{v}_r$ הם וקטורים קבועים שיש למצוא (יופיעו בוקטורים האלו r קבועים חופשיים)

דוגמה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \vec{y}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\vec{y}$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 3) + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

נמצא לע"ע וקטורים עצמיים:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \underline{\lambda = 1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \underline{\lambda = 2}$$

$$\boxed{y = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

דוגמה

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \vec{y}' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \vec{y}$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 2 \\ -5 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda - 2) + 10 = \lambda^2 - 6\lambda + 18 \Rightarrow \boxed{\lambda = 3 \pm 3i}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-3i}{2} \end{pmatrix} \Leftarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (3+3i) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \;:\lambda = 3 + 3i$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+3i}{2} \end{pmatrix} \;:\lambda = e - ei$$

פתרון כללי:

$$\vec{y} = C_1 e^{(3+3i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-3i}{2} \end{pmatrix} + C_2 e^{(3-3i)} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+3i}{2} \end{pmatrix}$$

$$= e^{3t} \left(C_1 (\cos 3t + i \sin 3t) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-3i}{2} \end{pmatrix} + C_2 (\cos 3t - i \sin 3t) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+3i}{2} \end{pmatrix} \right)$$

$$= e^{3t} \left[\cos 3t \begin{pmatrix} C_1 + C_2 \\ \frac{C_1 + C_2}{2} + \frac{3i(C_2 - C_1)}{2} \end{pmatrix} + \sin 3t \begin{pmatrix} i(C_1 - C_2) \\ \frac{i(C_1 - C_2)}{2} + \frac{3(C_1 + C_2)}{2} \end{pmatrix} \right] = ...$$

נגדיר $C_1 + C_2 = D_1$, $i(C_1 - C_2) = D_2$

$$... = \boxed{e^{3t} \left[\cos 3t \begin{pmatrix} D_1 \\ \frac{D_1}{2} + \frac{3D_2}{2} \end{pmatrix} + \sin 3t \begin{pmatrix} D_2 \\ \frac{D_2}{2} + \frac{3D_1}{2} \end{pmatrix} \right]}$$

אם D_1, D_2 ממשיים זה פתרון ממשי כללי.

דוגמה - שני ערכים עצמיים שווים

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \vec{y}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\lambda I - A\right) = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = \left(\lambda - 1\right)\left(\lambda - 3\right) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = \left(\lambda - 2\right)^2$$

נחפש פתרון בצורה

$$\vec{y} = \left[\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} t\right] e^{2t}$$

כאשר $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ קבועים שיש למצוא, במונחים של 2 קבועים חופשיים.

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} \alpha + \gamma t \\ \beta + \delta t \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} e^{2t} + 2\begin{pmatrix} \alpha + \gamma t \\ \beta + \delta t \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} \gamma + 2\alpha + 2\gamma t \\ \delta + 2\beta + 2\delta t \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$A\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha + \gamma t \\ \beta + \delta t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta + \left(\gamma - \delta\right) t \\ \alpha + 3\beta + \left(\gamma + 3\delta\right) t \end{pmatrix} = e^{2t}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 2\gamma = \gamma - \delta \\ 2\delta = \gamma + 3\delta \\ \gamma + 2\alpha = \alpha - \beta \\ \delta + 2\beta = \alpha + 3\beta \end{array} \right.$$

משני הראשונים $\delta = -\gamma$. משני האחרונים $\gamma = -\alpha - \beta$. נבחר γ להיות C_1(חופשית), כלומר

$$\gamma = C_1 \Rightarrow \delta = -C_1, \quad \alpha = C_2 \Rightarrow \beta = -C_1 - C_2$$

ולכן הפתרון הכללי הוא

$$\boxed{\vec{y} = \begin{pmatrix} C_2 + C_1 t \\ -C_1 - C_2 - C_1 t \end{pmatrix} e^{2t}}$$

דוגמה 3×3

$$\vec{y}'=\begin{pmatrix}-1&4&4\\-3&7&6\\2&-4&-3\end{pmatrix}\vec{y}$$

ב-$Mupad$$\Leftarrow$ע"ע 1 וערכים עצמיים $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\vec{y}=e^t\left(\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right)$$

בלוק ז'ורדן צמוד $\Leftrightarrow$ עם ע"ע 1. הבלוק הכי גדול פה - 2×2
הדרגה של הפולינום = מימד של בלוק ז'ורדן הכי גדול מינוס 1.

$$\vec{y}'=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}e^t+\begin{pmatrix}\alpha+at\\\beta+bt\\\gamma+ct\end{pmatrix}e^t=\begin{pmatrix}\alpha+a+at\\\beta+b+bt\\\gamma+c+ct\end{pmatrix}e^t$$

$$A\vec{y}=\begin{pmatrix}-1&4&4\\-3&7&6\\2&-4&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha+at\\\beta+bt\\\gamma+ct\end{pmatrix}e^t=$$

$$=\begin{pmatrix}(-\alpha+4\beta+4\gamma)+(-a+4b+4c)\,t\\(-3\alpha+7\beta+6\gamma)+(-3a+7b+6c)\,t\\(2\alpha-4\beta-3\gamma)+(2a-4b-3c)\,t\end{pmatrix}e^t$$

$$\begin{cases}-2a+4b+4c=0\\-3a+6b+6c=0\\2a-4b-4c=0\end{cases}$$

$$\boxed{a=2b+2c}$$

$$\begin{cases}-2\alpha+4\beta+4\gamma=2\,(b+c)\\-3a+6\beta+6\gamma=b\\2a-4\beta-4\gamma=c\end{cases}$$

$$(1)+(3)=2\,(b+c)+c=0\Rightarrow\boxed{b=-\frac{3}{2}c}$$

$$(2)+\frac{3}{2}(3)=b+\frac{3}{2}c=0$$

וקיבלנו 3 קבועים חופשיים c,β,γ, ושאר הקבועים הם:

$$\begin{cases} b=-\frac{3}{2}c \\ a=-c \\ \alpha=\frac{c}{2}+2\left(\beta+\gamma\right) \end{cases}$$

מקרה לא הומוגני

לדוגמה

$$\vec{y}'=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\vec{y}+\begin{pmatrix}1\\ t\end{pmatrix}$$

ניתן לעשות וריאציית מקדמים, לפעמים ניתן לקצר.

$$\vec{y}=A\left(t\right)\vec{y}+\vec{b}$$

$$\vec{y}=Y\left(t\right)\vec{\alpha}\left(t\right)$$

$$Y=\left(\vec{y}_1,...\vec{y}_n\right)$$

$$\int Y^{-1}\vec{b}dt$$

להומוגני יש פתרונות $e^t\vec{v}_1,e^{2t}\vec{v}_2$. לאי הומוגני ננחש פתרון פרטי בצורה $\vec{y}=\begin{pmatrix}\alpha+\beta t\\ \gamma+\delta t\end{pmatrix}$. נציב:

$$\begin{pmatrix}\beta\\ \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha+\beta t\\ \gamma+\delta t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\alpha-\delta t+1\\ 2\alpha+3\gamma+\left(2\beta+3\delta\right)t+t\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\delta=0,\beta=-\frac{1}{2},\gamma=\frac{3}{2},\alpha=\frac{-9}{4}$$

ככה מוצאים פתרון פרטי:

$$\vec{y}=\begin{pmatrix}-\frac{9}{4} & -\frac{1}{2}t\\ \frac{3}{2} & 0\end{pmatrix}$$

למשוואה

$$\vec{y}'=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\vec{y}+\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}e^{rt}$$

ניחוש $e^{rt}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ עובד, אלא אם כן $r=1,2$.

כאשר $r=1,2$ צריך $e^{rt}\begin{pmatrix}\alpha+\beta t\\ \gamma+\delta t\end{pmatrix}$.