

**בחינת סיום (מועד ב') בקורס**  
**מבנים אלגבריים להנדסה (83218)**  
 מרצה: פרופ' נתן קלר

משך הבחינה: שעתיים וחצי.

נא לענות על 4 מתוך 5 השאלות. בכל שאלה, סעיף א' שווה 15 נקודות וסעיף ב' שווה 10 נקודות.  
 חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון בלבד.

בהצלחה!

שאלה 1

א. תנו דוגמא לשתי תת חבורות של חבורת התמורות  $S_3$  שאינן טריוויאליות (כלומר, לא איבר אחד ולא כל החבורה): האחת תת חבורה נורמלית והשניה תת חבורה שאינה נורמלית.

ב. האם קיימת חבורה  $G$  והומומורפיזם  $f: S_3 \rightarrow G$  כך ש-  $\text{Ker } f = \{Id, (12)\}$  (כאשר  $Id$  היא תמורת הזהות)? תנו דוגמא (שכוללת את החבורה  $G$  ואת ההומומורפיזם) או הוכיחו שאין דוגמא כזו.

שאלה 2

א. תהי  $G$  חבורה לא קומוטטיבית בת 8 איברים. הוכיחו כי יש ל-  $G$  תת חבורה ציקלית בגודל 4.

ב. תנו דוגמא לחבורה בת 8 איברים שאין לה תת חבורה ציקלית בגודל 4.

שאלה 3

א. נסמן  $p(x) = x^7 - 1$  ו-  $q(x) = x^6 - 1$ . מצאו את המחלק המשותף המקסימלי  $\text{gcd}(p, q)$  והציגו אותו בצורה  $\text{gcd}(p, q) = a(x)p(x) + b(x)q(x)$ , עבור פולינומים  $a(x), b(x)$ .

ב. האם קיימים פולינומים  $a(x), b(x)$  כך שמתקיים  $a(x)p(x) + b(x)q(x) = x^2 + x$ ?

שאלה 4

א. יהי  $R$  חוג קומוטטיבי. הוכיחו כי אוסף האיברים הנילפוטנטיים ב-  $R$  הוא אידאל של  $R$ .

ב. תנו דוגמא לחוג  $R$  כך שאוסף האיברים הנילפוטנטיים ב-  $R$  איננו תת חוג של  $R$ .

שאלה 5

יהי  $F$  שדה עם 27 איברים.

א. האם קיים  $x \in F$ ,  $x \neq 0$  (כלומר,  $x$  איננו איבר היחידה החיבורי), כך שמתקיים  $x + x + x = 0$ ?

ב. האם קיים  $x \in F$ ,  $x \neq 1$  (כלומר,  $x$  איננו איבר היחידה הכפלי), כך שמתקיים  $x \cdot x \cdot x = 1$ ?