מבנים דיסקרטיים – תרגול 7

קריטריונים לבדיקה האם תת-קבוצה היא ת"ח:

משפט קיצור הדרך 1:

תהי H תת קבוצה לא ריקה של G. אז $H \leq G$ אם ורק אם:

1) $\forall a,b \in H,\ ab \in H$

2) $\forall a \in H,\ a^{-1} \in H$

משפט קיצור הדרך 2:

תהי H תת קבוצה לא ריקה של G. אז $H \leq G$ אם ורק אם:

$\forall a,b \in H,\ \ ab^{-1} \in H$

הערה: אם $A,B \leq G$ וגם $A \subseteq B$ אזי בוודאי שגם $A \leq B$ (אין צורך להוכיח זאת, זה נובע ישירות מהגדרה, הרבה סטודנטים מנסים להוכיח זאת בעזרת משפטי קיצור הדרך).

תרגיל: אם G חבורה סופית ו- H תת-קבוצה של G אזי $H \leq G$ אם ורק אם $H \neq \varnothing$ וגם $x, y \in H \Rightarrow xy \in H$.

הוכחה: כיוון <= ברור. בכיוון השני, מספיק לפי משפט קיצור הדרך להראות $\forall a \in H,\ a^{-1} \in H$.
יהי $e \neq a \in H$ (אם $H = \{e\}$ אזי סיימנו). לפי התנאי, מתקיים $a \in H \Rightarrow a^2 = aa \in H$, ובאינדוקציה רואים שכל החזקות החיוביות של של a הן ב H. אבל החבורה היא סופית, ולכן בסדרה $a, a^2, a^3, ..., a^n, ...$ קיימים $i < j$ כך ש $a^i = a^j$ ונקבל $a^{j-i} = e$, ומכאן נקבל ש-
$a^{-1} = a^{j-i-1} \Leftarrow aa^{j-i-1} = a^{j-i-1}a = e$.

ת"ח הנוצרת ע"י קבוצת איברים:

הגדרה : תהי G חבורה ותהי $A \subseteq G$ תת קבוצה של איברים ב-G (כך ש $A \neq \varnothing$)

A אינה בהכרח תת חבורה של G. נגדיר **תת חבורה הנוצרת** ע"י להיות התת-חבורה המינימלית המכילה את A ונסמנה $< A >$.

אם $G =< A >$ אזי נאמר ש G **נוצרת ע"י** A.

עבור קבוצה סופית של איברים, נכתוב בקיצור $< x_1, ..., x_k >$ במקום $< \{x_1, ..., x_k\} >$.

משפט:

א. $< A >= \bigcap\limits_{\substack{H_i \le G \\ A \subseteq H_i}} H_i$

ב. $< A >= \{x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k} \mid x_1,...,x_k \in A, n_1,...n_k \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\}$.

<u>הערה:</u>
בחבורה אבלית ניתן לדרוש בסעיף ב. שכל ה x_i-ים במכפלה שונים זה מזה, כיוון שניתן לקבץ אותם יחד.

<u>הערה:</u> אם החבורה חיבורית, סעיף ב. במשפט מקבל את הצורה:
$< A >= \{n_1 x_1 + n_2 x_2 \cdots + n_k x_k \mid x_1,...,x_k \in A, n_1,...n_k \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\}$

<u>דוגמאות:</u>

א. אם ניקח $\{2,3\} \subseteq \mathbb{Z}$ אזי $H :=< 2,3 >= \mathbb{Z}$ (כיוון ש $2 \in H \Rightarrow -2 \in H \Rightarrow (-2)+3 = 1 \in H$. כעת נקבל ש $1 \in H \Rightarrow \mathbb{Z} =<1> \subseteq H$).

ב. אם ניקח $\{4,6\} \subseteq \mathbb{Z}$ אזי לפי המשפט (סעיף ב.) נקבל $< \{4,6\} >= \{4n + 6m \mid m,n \in \mathbb{Z}\}$. נטען ש $< \{4,6\} >= \gcd(4,6)\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$, מדוע? ברור ש $2 \mid 4m + 6n$ ולכן $< \{4,6\} > \subseteq 2\mathbb{Z}$. יהי $2k \in 2\mathbb{Z}$ אזי $2k = 4(-k) + 6k \in < \{4,6\} >$, ולכן $< \{4,6\} > \supseteq 2\mathbb{Z}$. באופן דומה מראים עבור $a,b \in \mathbb{Z}$ ש $< a,b >= \gcd(a,b)\mathbb{Z}$.

תרגיל: הראו ש S_n נוצרת ע"י קבוצת החילופים.