שיעור חזרה

1. עבור אילו ערכים של k המספר 2 הוא ע"ע של:

$$A=\begin{pmatrix} k-2 & 2k & k+1 \\ k-1 & -1 & 2 \\ -k & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

פתרון: נציב בפ"א:

$$P_A(x)=\det\begin{pmatrix} x-k+2 & -2k & -k-1 \\ 1-k & x+1 & -2 \\ k & 0 & x+6 \end{pmatrix}$$

$x=2$, ולבדוק עבור אילו ערכי k מקבלים דטר' 0:

$$\det\begin{pmatrix} 4-k & -2k & -k-1 \\ 1-k & 3 & -2 \\ k & 0 & 8 \end{pmatrix}=$$

תפתחו לפי שורה אחרונה ואמור לצאת בסדר.

2. נתונה המטריצה:

$$A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -8 & -5 \end{pmatrix}$$

מתי ± 1 שניהם ע"ע של A.

פתרון: נחשב פ"א:

$$P_A(x)=\det\begin{pmatrix} x-a & -b & -b \\ 1 & x-3 & -2 \\ -2 & 8 & x+5 \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} x-a & -b & -b \\ 1 & x-3 & -2 \\ 0 & 2(x+1) & x+1 \end{pmatrix}=$$

$$=(x+1)\det\begin{pmatrix} x-a & -b & -b \\ 1 & x-3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}=(x+1)\det\begin{pmatrix} x-a & b & -b \\ 1 & x+1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=(x+1)((x-a)(x+1)-b)=(x+1)(x^2+(1-a)x-(b+a))$$

עד כאן קיבלנו שבוודאי $\lambda=-1$ ע"ע. כדי שגם 1 יהיה ע"ע דרוש שהוא יהיה שורש של $x^2+(1-a)x-(b+a)$. כיוון שיש שני שורשים, נדרוש שהשני יהיה ± 1 כדי שלא יהיו שורשים נוספים. לכן דרוש אחד מהבאים:

$$x^2+(1-a)x-(b+a)=(x-1)^2$$

$$x^2+(1-a)x-(b+a)=(x-1)(x+1)$$

3. יהי V מ"ו עם בסיס $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$, ותהי $T:V\to V$ הע"ל המוגדרת ע"י:

$$\begin{cases} T(v_i)=v_{i+1} & i<n \\ T(v_n)=a^n v_1 & i=n \end{cases}$$

(א) מצאו את המטריצה המייצג את T לפי B.

פתרון:

$$C_i([T]_B)=[T(v_i)]_B=[v_{i+1}]_B=e_{i+1}$$

כי:

$$v_{i+1}=0v_1+\cdots+1v_{i+1}+0\cdots$$

$$C_i(A)=\begin{cases} e_{i+1} & i<n \\ a^n e_1 & i=n \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & a^n \\ 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

(ב) עבור אילו ערכי a,n המטריצה לכסינה?

פתרון: עבור $a=0$ אז לכל $n>1$ נקבל בלוק ז'ורדן $J_n(0)$ ולא לכסין.

עבור $a\neq 0$ נחשב פ"א:

$$\det\begin{pmatrix} x & 0 & \cdots & -a^n \\ -1 & x & & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{pmatrix}=x^n+(-1)^{n+1}(-a^n)(-1)^{n-1}=$$

בעזרת פיתוח לפי שורה ראשונה: עבור x מקבלים משולשית תחתונה מהצורה:

$$x\cdot\det\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{pmatrix}=x^n$$

ועבור $-a^n$ מקבלים משולשית עליונה מהצורה:

$$(-1)^{n+1}(-a^n)\cdot\det\begin{pmatrix} -1 & x & \\ 0 & -1 & x \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1)^{n+1}(-a^n)(-1)^{n-1} = -a^n$$

בסה"כ מקבלים:

$$P_A(x) = x^n - a^n$$

4. יהי $B = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס, ונניח נתונה העל המקיימת:

$$T(v_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, T(v_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, T(v_3) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

בדקו אם לכסינה.

פתרון: באופן כללי, אפשר למצוא את $[T]_B^B$ וללכסן, וכן למצוא את $[T]_S^S$ וללכסן.

$$[T]_B^B = \left(\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_B \quad \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right]_B \quad \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right]_B \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

הוקטורים המתאימים ל־1:

$$V_1 = N\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}\right) = span\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

וקטורים אלה הם וקטורי קואורדינטות, והם מייצגים, לפי B, את: $\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

הוקטור המתאים ל־4:

$$V_4 = N\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\right) = span\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

וקטור זה מייצג, לפי B, את $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. כלומר:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

באופן כללי, אם רק מבקשים לבדוק לכסינות ודברים כאלה, יותר נח לעבור לבסיס הסטנדרטי ולעבוד שם ללא קואורדינטות.