

לינארית 2 תיכוניסטים מועד ב תשעה, שאלה 3 ב:

$$W_1 = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} : \text{tr}(A) = 0\} \quad 1.$$

(א) בסיס או"ג: המטריצות $\{E_{i,j} | i \neq j\} \in W_1$ או"ג. נשאר למצוא עוד n מטריצות שאיתם נקבל בסיס או"ג (אלו שאמורות ל"החליף" את המטריצות 3×3 ו 2×2 במקרים של $1 \leq i \leq n-1$): $\{E_{ii} - E_{i+1,i+1} | 1 \leq i \leq n-1\}$ אחרי בדיקה במקרים של 2×2 ו 3×3 ניתן להגיע למטריצות הבאות:

$$\begin{aligned} & \text{Diag}(1, -1, 0 \dots 0) \\ & \text{Diag}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 0 \dots 0) \\ & \text{Diag}(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, 0 \dots 0) \\ & \text{Diag}(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, -\frac{4}{8}, 0 \dots 0) \\ & \vdots \\ & \text{Diag}(\frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}, -\frac{n-1}{2^{n-1}}) \end{aligned}$$

כלומר מטריצות אלכסונית מהצורה הבא: האלכסון מתחיל ב k פעמים $\frac{1}{2^{k-1}}$ והקורדינאטה ה $k+1$ ית היא $-\frac{k}{2^{k-1}}$ (עבור $1 \leq k \leq n-1$). מטריצות אלו ייצרו בסיס או"ג (ביחד עם $\{E_{i,j} | i \neq j\}$) נ.ב. אם זה לא ברור המכפלה הסטנדרטית ב $\mathbb{C}^{n \times n}$ שווה למכפלה הסטנדרטית על \mathbb{C}^{n^2} עם נזהה כל מטריצה $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ עם הייצוג לפי הבסיס הסטנדרטי שלה ב \mathbb{C}^{n^2} .

(ב) משלים או"ג: $\text{span}\{I\}$ (המימד צריך להיות 1 וכל מטריצה עם $\text{tr} = 0$ תקיים שהמ"פ עם I שווה 0)

2. טעות בשאלה - המטריצות שצמודות לעצמן אינן תת מרחב בכלל. למה? $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ צמודה לעצמה אבל כפולה ב i תתן מטריצה שאינה צמודה לעצמה.

3. טעות בשאלה - המטריצות שאנטי צמודות לעצמן אינן תת מרחב בכלל. למה? אנטי צמודה לעצמה אבל כפולה ב i תתן מטריצה שאינה אנטי- צמודה לעצמה. $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

4. מרחב המטריצות המשולשיות העליונות:

(א) בסיס או"ג - $\{E_{i,j} : j \leq i\}$

(ב) בסיס למשלים או"ג - $\{E_{i,j} : i < j\}$