תירגול 9

2 ביוני 2017

ז'ירדון

הגדרה: בלוק זורדן הוא מטריצה מהצורה

$$J_k(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{k\times k}$$

למשל:

$$J_3(0)=\begin{pmatrix}0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0\end{pmatrix},J_4(1)=\begin{pmatrix}1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1\end{pmatrix}$$

עובדות:

1. בלוק זורדן אינו לכסין (עבור $k>1$). יש לו ו"ע עצמי יחיד $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ של ע"ע λ.
2. פ"א=פ"מ . למשל ל $J_k(3)$ זהו $(\lambda-3)^k$
3. מתקיים כי $J_k(\lambda)=J_k(0)+\lambda I$

הגדרה: מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ היא בצורת זורדן אם היא מטריצת אלכסונים בלוקים כאשר כל בלוק הוא בלוק זורדן. כלומר מהצורה

$$\begin{pmatrix}J_{k_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{k_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{k_t}(\lambda_t)\end{pmatrix}$$

משפט: $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ צמודה למטריצה בצורת זורדן (כלומר קיימת P הפיכה כך ש $J=P^{-1}AP$, J בצורת זורדן) אמ"מ הפ"א $p_A(\lambda)$ מל"ל. במקרה זה מתקיים במטריצה J כי

1. מספר הפעמים שע"ע λ_0 מופיע על האלכסון = ר"א של λ_0
2. מספר הבלוקים של λ_0 = ר"ג של λ_0
3. גודל הבלוק הגדול ביותר = החזקה של $(\lambda - \lambda_0)$ בפ"מ

הערה: המטריצה J נקראת צורת זורדן של A והיא יחידה עד כדי סדר בלוקים.
הערה: ההגדרות דומות יש עבור $T : V \to V$ אופרטור.
דוגמאות:

1. נתון עבור מטריצה A כי:

(א) פ"א = $p_A(\lambda) = (\lambda - 2)^3 (\lambda - 4)^4$
(ב) פ"מ $m_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2 (\lambda - 4)^2$

ולכן נסיק כי מתקיים

λ	Alg.$=\#\lambda$	Geo.$=\#$ Blocks	Power in $m_A =$ Biggest Block
2	3	$\in \{1,2,3\}$	2
4	4	$\in \{1,2,3,4\}$	2

ולכן צורות זורדן האפשריות של A הם

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ & 2 & & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 4 & 1 & & \\ & & & & 4 & & \\ & & & & & 4 & \\ & & & & & & 4 \end{pmatrix}$$

או

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ & 2 & & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 4 & 1 & & \\ & & & & 4 & & \\ & & & & & 4 & 1 \\ & & & & & & 4 \end{pmatrix}$$

2. תרגיל: עבור

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מצאו צורת זורדן ומטריצה מזרדנת.
פתרון

$$p_A(\lambda) = (\lambda-2)^4 \,,\, m_A(\lambda) = (\lambda-2)^3$$

ולכן צורת זורדן היא

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

כעת נמצא בסיס ל $N(A-2I)$ נשלים ל $N(A-2I)^2$ ונשלים לבסיס $N(A-2I)^3$

$$N(A-2I) = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$N(A-2I)^2 = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$N(A-2I)^3 = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

כעת

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (A-2I)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, (A-2I)^2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

בת"ל שהם יצרו את הבלוק 3×3 ובשביל ליצור את הבלוק 1×1 ניקח $v \in N(A-2I)\backslash span(S)$ ונשלים בעזרתו לבסיס [נשים את איברי S בסדר הפוך], למשל

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

ואז נגדיר

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

תקיים

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

הערה: במידה ויש כמה ע"ע, למשל λ_1, λ_2, נעבוד עם כל אחד בנפרד ונייצר קבוצות בת"ל B_1, B_2 כמו בדוגמא זאת ואז עמודות המטריצה המזרדנת תהיה וקטורי הבסיס $B_1 \cup B_2$

.3

(א) הוכיחו כי $J_k(\lambda) \sim [J_k(\lambda)]^t$
פתרון מתקיים כי

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \lambda & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

ולכן הפולינום האופיני שלה $p(x) = (x-\lambda)^k$ והר"ג של λ שווה 1 ולכן יש צורת זורדן שלה מכילה בלוק אחד ולכן צורת זורדן שלה היא $J_k(\lambda)$ ולכן הם דומות

(ב) מסקנה: עבור J מטריצה בצורת זורדן מתקיים כי $J \sim J^t$
הוכחה: $J = \oplus_{i=1}^t J_i$ עבור J_i בלוקי זורדן. מסעיף קודם קיימות P_i כך ש $P_i^{-1} J_i P_i = J_i^t$ ולכן

$$P^{-1}JP = \oplus_i p_i^{-1} \cdot \oplus_i J_i \cdot \oplus P_i = \oplus_i P_i^{-1} J_i P_i = \oplus_i J_i^t = J^t$$

(ג) מסקנה: עבור מטריצה A מרוכבת מתקיים $A \sim A^t$
הוכחה: $A \sim J$ ולכן $A^t \sim J^t$ ואז מסעיף קודם נקבל $A \sim J \sim J^t \sim A^t$